INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 14 de Junho de 2017

Duração: 2 horas

I

1. Considere o PVI $\begin{cases} e^{-t}x^{-1} + e^{x}x' = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

a) **(1,5)** Mostre que a equação não é exacta e determine um factor integrante.

b) **(2,5)** Utilize como factor integrante a função $\mu(x) = x$ para resolver o PVI, e indique o intervalo máximo de existência de solução.

2. Atenda à seguinte

Definição: Chama-se equação diferencial de Clairaut, a uma equação diferencial da forma $x = tx' + f(x')$, onde $f(x')$ é uma função diferenciável na variável x'.

a) **(1,0)** Mostre que se $f(x')$ é constante ou se $f(x') = a(t)x'$, com $a \in C^0(I \subset \Re)$, então a equação é de variáveis separáveis.

b) **(1,5)** Mostre que as soluções duas vezes diferenciáveis da equação satisfazem uma determinada equação de 2ª ordem, e conclua que existe uma família de soluções com gráficos rectilíneos.

c) **(2,0)** Obtenha a solução geral da equação de Clairaut correspondente a tal família, e resolva a equação $x = tx' - 9(x')^2$.

3. Considere o sistema de equações diferenciais não linear

$$\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = 1 - xy \end{cases}.$$

a) **(2,0)** Determine as soluções de equilíbrio do sistema e classifique-as quanto à estabilidade.

b) **(2,5)** Resolva o PVI $\begin{cases} X' = AX \\ X(1) = (-1,1) \end{cases}$ correspondente ao sistema linearizado $A = Df(1,1)$, e $X(t) = (x(t), y(t))$.

II

Suponha que o preço de um produto após *n* anos, p_n, se relaciona com a oferta após *n* anos, s_n, através da igualdade $p_n = a - bs_n$, onde *a* e *b* são constantes positivas. Suponha ainda que o preço e a oferta são proporcionais em anos alternados, $kp_n = s_{n+1}$, $k > 0$.

a) **(2,0)** Mostre que p_n satisfaz uma equação com diferenças finitas, linear, de 1ª ordem, de coeficientes constantes e não homogénea. Apresente a solução geral dessa equação.

b) **(1,5)** Mostre que o preço tem tendência a estabilizar se $bk < 1$, isto é, p_n converge para um valor real quando $n \to +\infty$.

III

Considere a função complexa de variável complexa $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-4i}}}{z^2(z-(1+i))(z+1)}$.

a) **(1,5)** Determine e classifique as singularidades da função.

b) **(2,0)** Determine o valor do integral $\displaystyle\int_{|i-z|=2} f(z)dz$, justificando convenientemente.

fim