SOLUÇÕES

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 14 de Junho de 2017

I

1a) $\underbrace{e^{-t}x^{-1}}_{M(t,x)} + \underbrace{e^{x}}_{N(t,x)} x'=0$, a equação não é exacta porque $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-e^{-t}}{x^2} \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 0$. Um factor integrante é $\mu(x) = |x|$.

b) Solução do PVI é, $e^{-t} + e^{x}(1-x) = 1$. $I = \Re$.

2a) Se $f(x') = C$, com C constante, então $x = tx' + C \underset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} x' = \frac{1}{t}(x - C)$ que é uma edo de variáveis separáveis;

se $f(x') = a(t)x'$ então $x = tx' + a(t)x' \underset{t\neq -a(t)}{\Leftrightarrow} x' = \frac{1}{t+a(t)}x$ que é uma edo de variáveis separáveis.

b) Seja $\varphi(t)$ uma solução duas vezes diferenciável da equação, então após derivar uma vez a equação obtém-se $\varphi''(t)\left(t + f'(\varphi'(t))\right) = 0$ que é uma edo de 2ª ordem. Se $\varphi''(t) = 0$, então $\varphi(t) = at + b$ com $a, b \in \Re$ é uma família de soluções com gráficos rectilíneos.

c) Substituindo $\varphi(t) = at + b$ com $a, b \in \Re$ na equação de Clairaut, obtém-se $b = f(a)\ \forall_{a\in\Re}$, e daí a solução geral é $x(t) = at + f(a)$ com $a \in \Re$.

Assim, a solução geral da equação $x = tx' - 9(x')^2$ é $x(t) = at - 9a^2$ com $a \in \Re$.

3a) Soluções de equilíbrio são as soluções do sistema $\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ 1 - xy = 0 \end{cases}$. Os pontos de equilíbrio são $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

$A = Df(x,y) = \begin{bmatrix} -3x^2 & 1 \\ -y & -x \end{bmatrix}$. Relativamente ao equilíbrio $(1,1)$, tem-se $|Df(1,1) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ com multiplicidade 2. Como $\operatorname{Re}\lambda < 0$, então o equilíbrio $(1,1)$ é um escoadouro, assimptoticamente estável. Relativamente ao equilíbrio $(-1,-1)$, tem-se $|Df(-1,-1) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{5}$. Como $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$ e $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$, então o equilíbrio $(-1,-1)$ é um ponto de sela que é um ponto instável.

b) PVI $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -x - y \\ x(1) = -1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$. Pelo TFSL a solução do PVI é dada por $X(t) = e^{A(t-1)}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Pela alínea anterior $\lambda = -2$ com multiplicidade 2, assim a matriz semi-simples é $S = diag\{-2\}$ e a matriz nilpotente é $N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ de ordem 2.

A solução do PVI é $X(t) = e^{-2(t-1)}\begin{bmatrix} 2t-3 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$.

II

a) $p_{n+1} = a - bs_{n+1} \Leftrightarrow p_{n+1} + bkp_n = a$ que representa uma edf linear de 1ª ordem, de coeficientes constantes e não homogénea.

A solução geral escreve-se como soma da solução geral da edf homogénea associada com uma solução particular da equação não homogénea, ou seja, $p_n = C(-bk)^n + p_n^p$, com $C \in \Re$.

Pelo método do Polinómio Aniquilador, obtém-se $F = 1$, e assim a solução particular é do tipo constante, $p_n^p = \dfrac{a}{1+bk}$.

A solução geral da equação é $p_n = C(-bk)^n + \dfrac{a}{1+bk}$, com $C \in \Re$.

b) Por hipótese $-1 < -bk < 0$, assim $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n \underset{hip}{=} \dfrac{a}{1+bk}$ que é um valor real positivo.

III

a) As singularidades da função são $z = 4i,\ z = 0,\ z = 1+i$ e $z = -1$. Como

$\lim\limits_{z\to 4i} f(z)$ não existe, pois a exponencial complexa é uma função periódica,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \infty \wedge \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \frac{-(1-i)e^{-1/4i}}{2},$$

$$\lim_{z\to 1+i} f(z) = \infty \wedge \lim_{z\to 1+i} (z-1-i) f(z) = \frac{e^{1/(1-3i)}}{(2+i)(1+i)^2},$$

$$\lim_{z\to -1} f(z) = \infty \wedge \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = \frac{-(2-i)e^{1/(-1-4i)}}{5},$$

então, a primeira é uma singularidade essencial, a segunda é um pólo de ordem 2 e as duas últimas são pólos simples.

b) $z = 4i \in ext\,\gamma$
$z = 0, 1+i, -1 \in \operatorname{int}\gamma$

Aplicando o teorema dos Resíduos de Cauchy, f é holomorfa no conexo $A = \left\{ z \in C : |i - z| < \frac{7}{2} \right\}$ que contém a curva γ, esta é uma curva de Jordan regular que contém no seu interior as singularidades $z = 0, 1+i, -1$, obtém-se o valor do integral $\int\limits_{|i-z|=2} f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Re}s(f,0) + \operatorname{Re}s(f,1+i) + \operatorname{Re}s(f,-1)\right)$, onde

$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right)=\frac{(1-15i)e^{-1/4i}}{16(1+i)^2},$$

$$\operatorname{Res}(f,1+i)=\frac{e^{1/(1-3i)}}{(2+i)(1+i)^2},$$

$$\operatorname{Res}(f,-1)=\frac{-(2-i)e^{1/(-1-4i)}}{5}.$$