PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA 2017-2018

Programação Linear Inteira

1. O responsável por um empreendimento de exploração de gás natural deve escolher, entre 10 possíveis locais de exploração, os cinco de menor custo total. Os custos de exploração são $c_j, j = 1, \dots, 10$. A escolha dos locais 1 e 7 impede a escolha do local 8. A escolha dos locais 3 ou 4 impede o acesso ao local 5. Apenas dois dos locais 5, 6, 7, e 8 podem ser escolhidos. Apresente uma formalização para o problema do responsável do empreendimento, explicando cuidadosamente o significado das variáveis de decisão e das restrições.

2. Um fabricante de têxteis está a planear uma produção de toalhas de praia para vender antes do início do verão. As toalhas serão produzidas em lotes de 50 unidades. O fabricante já decidiu que irá produzir dois tipos de toalhas: lisas e de riscas. As toalhas lisas poderão ser amarelas ou verdes. As de riscas poderão ter riscas azuis ou encarnadas. O fabricante decidiu não produzir mais de 100 lotes de toalhas lisas e já tem uma encomenda de 40 lotes de toalhas amarelas. Decidiu também que, havendo produção de toalhas de riscas, serão produzidos pelo menos 10 lotes. Se forem produzidos os dois tipos de toalhas, lisas e de riscas, será necessário proceder à limpeza de uma das máquinas utilizadas. Essa limpeza demora meia hora e custa 60 u.m.. O fabricante dispõe de 150 horas de mão-de-obra para produzir as toalhas.

A receita unitária, o custo por lote de toalhas e o tempo de mão-de-obra necessário para produzir um lote de toalhas são apresentados na tabela seguinte.

Toalha	Receita por toalha (u.m.)	Custo por lote (u.m.)	Mão-de-obra necessária por lote (horas)
Lisa amarela	10	300	1.25
Lisa verde	12	410	1.00
Riscas azuis	14	450	2.00
Riscas encarnadas	13	440	1.50

Apresente uma formalização que permita ao fabricante adotar o plano de produção de toalhas de praia de forma a maximizar o lucro total. Explique cuidadosamente o significado de todas as variáveis de decisão e das funções que utilizar.

3. Uma fábrica concluiu a produção de uma encomenda cujo transporte para os clientes será feito dentro de um mês. Devido à escassez de espaço na fábrica, serão arrendados armazéns para guardar o produto até à data do seu transporte para dois clientes, C1 e C2, que encomendaram 200 e 600 unidades do produto, respetivamente. Estão disponíveis, para arrendamento, três armazéns, A1, A2 e A3 que têm espaço para armazenar 450, 400 e 500 unidades do produto, respetivamente. A renda mensal dos armazéns A1 e A2 é de 250 € e de 225 €, respetivamente. A renda mensal do armazém A3 é de 235 € se não forem armazenadas mais de 350 unidades do produto. Se a quantidade armazenada exceder as 350 unidades o valor da renda é de 275 €. Na decisão a tomar há ainda que considerar os custos unitários de transporte dos armazéns para os clientes, que se encontram na tabela abaixo, em euros.

	C1	C2
A1	5	2
A2	7	4
A3	3	6

Formalize, em programação linear inteira, o problema da determinação do armazenamento ótimo do produto.

4. Um investidor tem disponíveis 2 milhões e 500 mil u. m. para utilizar na aquisição de apartamentos. Os apartamentos que o investidor tem em vista situam-se em três zonas nobres da cidade: Chiado (CH), Avenida da Liberdade (AL) e Campo de Ourique (CO). Em cada uma das três zonas vai adquirir pelo menos um apartamento. Vai também comprar pelo menos um apartamento de cada uma de três tipologias, T1, T2 e T3. Se comprar mais de cinco apartamentos de tipologia T1 não vai adquirir mais de dois apartamentos de tipologia T2. Para além disso, os três apartamentos de tipologia T1 situados na Avenida da Liberdade têm um proprietário único, que está disposto a fazer uma redução de 5% no preço caso o investidor compre os três apartamentos. Na tabela seguinte apresentam-se os restantes dados a considerar na decisão. Tendo o investidor por objetivo a maximização do retorno do seu investimento formalize este problema em programação linear inteira. Indique o significado de todas as variáveis de decisão e restrições.

Apartamento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Zona	CH	CO	CH	CO	AL	AL	CH	CH	AL	AL	CO	CH	CH	AL	AL	CO
Tipologia	T1	T1	T3	T2	T2	T3	T1	T2	T2	T1	T1	T3	T2	T1	T1	T2
Custo (milhares de u. m.)	140	82	450	171	240	350	142	210	245	137	77	500	205	140	143	168
Retorno mensal (u. m.)	900	700	2200	980	1200	1500	920	1300	1250	950	725	2400	1280	975	925	950

5. Um comerciante pretende vender na sua loja especializada em artigos desportivos pelo menos três novos modelos de bicicleta. O comerciante está interessado em quatro novos modelos que são produzidos por três fabricantes. Os custos unitários e os preços unitários de venda na loja, em u.m., são:

	Custos unitários			Preços unitários de venda
	Fabricante 1	Fabricante 2	Fabricante 3	
Modelo 1	175	177	176	399
Modelo 2	297	295	296	599
Modelo 3	479	478	477	799
Modelo 4	1473	1474	1475	1799

Por razões logísticas, o comerciante vai comprar todas as bicicletas a um único fabricante e de cada modelo escolhido pretende colocar à venda pelo menos 20 bicicletas. O comerciante dispõe de 60 mil u.m. para comprar as bicicletas e pretende maximizar o lucro. Formalize este problema em programação linear inteira, indicando o significado de todas as variáveis de decisão e restrições.

6. Resolva os seguintes problemas de PLI por um algoritmo de *branch and bound* adotando

(i) a regra LIFO

(ii) a regra BUB

a) min $Z = -x_1 - x_2$

s.a

$$4x_1 - 2x_2 \geq 1$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$x_2 \geq \frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

b) max $Z = 2x_1 + x_2$

s.a

$$5x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e inteiro}$$

7. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{array}{ll} \min & Z = 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7 \\ & 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

a) Escreva a relaxação linear do problema.

b) Mostre que, se o valor da variável x_3 for fixado em zero, a relaxação linear do problema tem uma única solução admissível. Explicite essa solução.

c) Sabendo que a solução ótima da relaxação linear do problema é $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1/2$, resolva-o por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

8. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 10x_1 + 12x_2 + 16x_3 \\ \text{s.a} & 22x_1 + 25x_2 + 32x_3 \leq 72 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array}$$

a) Determine um majorante do valor ótimo do problema. Justifique.
b) Determine um minorante do valor ótimo do problema. Justifique.
c) Resolva-o por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

9. Resolva o seguinte problema de PLI pelo algoritmo de planos de corte de Gomory:

$$\begin{array}{ll} \min & Z = 2x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -4x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

10. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 11 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

a) Resolva a relaxação linear do problema.
b) Resolva o problema pelo algoritmo de planos de corte de Gomory escolhendo sempre a linha da função objetivo para gerar os cortes.

11. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{array}{lll} \max & Z = 3x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.a} & 2x_1 + 5x_2 \leq 25 & \text{[R1]} \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 25 & \text{[R2]} \\ & x_1 + x_2 \leq 6 & \text{[R3]} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} & \end{array}$$

a) Escreva a relaxação linear do problema e resolva-a. O que pode afirmar sobre o valor ótimo do problema?

b) No quadro ótimo do simplex, relativo à resolução da relaxação linear do problema, os coeficientes associados à variável x_2 são

	x_1	x_2	s_3	s_4	s_5
x_2	0	1	0	-1/3	5/3

sendo s_3, s_4 e s_5 as variáveis auxiliares associadas às restrições R1, R2 e R3, respetivamente. Deduza a expressão do corte de Gomory que se obtém a partir da linha de x_2.

c) Resolva graficamente o problema que resulta da introdução do corte gerado em b) na relaxação linear do problema de PLI e comente a solução obtida.

12. Considere o seguinte problema de PLI e o quadro final de simplex da sua relaxação linear:

max $Z = 5x_1 + 6x_2$

s.a $4x_1 - 4x_2 \leq 5$

$2x_1 + 3x_2 \leq 15$

$-x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	solução
Z	0	0	3/20	11/5	0	135/4
x_1	1	0	3/20	1/5	0	15/4
x_2	0	1	-1/10	1/5	0	5/2
s_3	0	0	1/4	0	1	25/4

a) Deduza a expressão do corte de Gomory gerado com base na linha de x_2.

b) Introduza o corte gerado em a) e reotimize.

13. Considere o seguinte problema de programação linear inteira:

(P) min $Z = 2x_1 + 2x_2$

s.a $2x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + 2x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \in \{0,1\}$

a) Resolva graficamente a relaxação linear de (P) e apresente um limite do valor ótimo de (P).

b) A desigualdade $x_1 \geq 1$ é um corte?

c) Por um processo algébrico, deduza um corte a partir das restrições de (P).

14. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{array}{ll} \text{min} & Z = 2x_1 - 10x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

A solução ótima da sua relaxação linear é: $x_1 = 3.5$ e $x_2 = 3.5$.

a) Determine um majorante e um minorante para o valor ótimo. Justifique.

b) Apresente a expressão de um corte. Justifique.

c) Determine a solução ótima usando um algoritmo de tipo *branch and bound*. Justifique as suas opções.

15. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & Z = 3x_1 + 7x_2 \\ \text{s.a} & -2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

e o quadro ótimo da sua relaxação linear:

	x_1	x_2	s_1	s_2	solução
Z	0	0	18/5	17/5	261/5
x_2	0	1	3/5	2/5	36/5
x_1	1	0	-1/5	1/5	3/5

a) Introduza o corte de Gomory gerado com base na linha de x_2 e reotimize.

b) Determine a solução ótima usando um algoritmo de tipo *branch and bound*.
(Sugestão: use na raiz da árvore de pesquisa o corte gerado na alínea anterior).

16. Considere o seguinte problema de programação linear inteira e o quadro de simplex correspondente à solução ótima da sua relaxação linear:

(P) max $Z = -x_1 + 12x_2$

s.a $-2x_1 + 5x_2 \leq 19$

$-x_1 + 8x_2 \leq 35$

$x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	solução
Z	0	0	0	3/2	1/2	54
x_2	0	1	0	1/8	1/8	19/4
x_1	1	0	0	0	1	3
s_1	0	0	1	-5/8	11/8	5/4

a) Deduza a expressão do corte de Gomory gerado com base na linha de s_1.

b) Resolva o problema (P) por um algoritmo de *branch and bound*, utilizando a regra BUB.

Sugestão: resolva as relaxações lineares graficamente.

17. Considere o problema de caixeiro viajante cuja matriz de distâncias é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 12 & 8 \\ 9 & 0 & 15 & 11 \\ 14 & 15 & 0 & 10 \\ 13 & 16 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine um minorante do valor ótimo do problema. Justifique a escolha do método utilizado.

b) Determine um majorante do valor ótimo do problema e justifique a escolha do método utilizado. Use o resultado obtido em a) para avaliar o majorante obtido.

c) Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

18. Considere o problema de caixeiro viajante cuja matriz de distâncias é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 11 & 6 \\ 9 & 0 & 13 & 8 \\ 16 & 17 & 0 & 9 \\ 13 & 16 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine um minorante do comprimento do circuito Hamiltoniano ótimo, através da resolução de uma relaxação do problema.

b) Determine o circuito Hamiltoniano gerado pela heurística do vizinho mais próximo escolhendo a cidade 3 no passo inicial da heurística.

c) Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

d) Calcule o desvio percentual do minorante obtido em (a) relativamente ao comprimento do circuito Hamiltoniano ótimo

19. Considere o seguinte problema de programação linear inteira e o quadro de simplex correspondente à solução ótima da sua relaxação linear:

$$\begin{array}{ll} \min & Z = -x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ \text{s.a} & 2x_1 \quad + 6x_3 \leq 5 \\ & -3x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 + 8x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	s_4	s_5	s_6	solução
Z	0	-13/5	0	-1/5	0	-3/5	-23/5
x_1	1	-3/5	0	4/5	0	-3/5	2/5
s_5	0	-3/5	0	23/10	1	-8/5	49/10
x_3	0	1/5	1	-1/10	0	1/5	7/10

a) Deduza a expressão do corte de Gomory gerado com base na linha de Z.

b) Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*, fazendo a primeira ramificação com base na variável x_3. Sugestão: resolva as relaxações lineares graficamente.

20. Considere o seguinte problema de saco mochila binário:

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 80x_1 + 187x_2 + 30x_3 + 84x_4 + 30x_5 \\ \text{s.a} & 32x_1 + 85x_2 + 30x_3 + 28x_4 + 15x_5 \leq 83 \\ & x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\ldots,5 \end{array}$$

a) Resolva a relaxação linear do problema.

b) Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*, adotando a regra BUB.

c) Mostre que qualquer solução admissível do problema verifica a desigualdade $\sum_{j=1}^{4} x_j \leq 2$.