

PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA 2017-2018

EXERCÍCIOS ADICIONAIS

1. Resolva graficamente o seguinte problema de programação por metas:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = P_1 s_2^- + P_2 s_1^- + P_3 s_3^- \\ \text{s. a} \quad & x_1 + s_1^- - s_1^+ = 5 \\ & x_2 + s_2^- - s_2^+ = 50 \\ & 3x_2 - 8x_1 + s_3^- - s_3^+ = 120 \\ & x_2 \leq 40 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & s_i^-, s_i^+ \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

2. Considere o seguinte problema de programação linear inteira:

$$\begin{aligned} \text{(P) min} \quad & Z = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 \\ \text{s. a} \quad & 52x_1 + 28x_2 + 35x_3 + 25x_4 \geq 25 \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

- a) Mostre que a solução ótima de (P) pode ser obtida através da resolução de um problema de saco mochila binário.
- b) Resolva o problema (P) por um algoritmo de *branch and bound*. Indique a estratégia de pesquisa adotada e a ordem de resolução das relaxações lineares dos problemas.

3. Considere o seguinte problema de programação linear inteira:

$$\begin{aligned} \text{(P}_1\text{) min} \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 4x_2 \leq 25 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ & 3x_1 + x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

- a) Resolva a relaxação linear de (P₁).
- b) Resolva o problema (P₁) por um algoritmo de *branch and bound*. Utilize a regra de pesquisa BUB e escolha a variável de menor índice na ramificação.

4. Considere o seguinte problema de programação linear inteira e o quadro ótimo de simplex da sua relaxação linear:

$$(Q) \quad \min \quad Z = 2x_1 - 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad -x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$2x_1 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

	x_1	x_2	s_3	s_4	s_5	solução
Z	-1/2	0	-3/2	0	0	-15/2
x_2	-1/2	1	1/2	0	0	5/2
s_4	2	0	0	1	0	5
s_5	3/2	0	-1/2	0	1	1/2

a) Apresente um minorante para o valor ótimo de (Q).

b) Deduza a expressão do corte de Gomory gerado com base na linha de x_2 .

c) Resolva graficamente a relaxação linear do problema que resulta da introdução em (Q) do corte de Gomory deduzido em b).

d) A desigualdade $-x_1 + 8x_2 \leq 14$ é também um corte?

5. Na construção da nova sede de uma empresa serão colocadas condutas de forma a permitir a chegada de água aos seguintes locais: duas instalações sanitárias (IS1 e IS2), um restaurante (RT), dois armazéns (A1 e A2), uma garagem (GA) e um gabinete médico (GM). O custo de colocação de uma conduta entre quaisquer dois dos locais é de 5 u.m. por metro linear. Será ainda colocada uma conduta a ligar o ponto de acesso à água da companhia (AC) a um dos locais, com um custo de 6 u.m. por metro linear. No quadro abaixo indicam-se os locais que poderão ser ligados e os comprimentos das correspondentes condutas, em metros:

Ligação	IS1-IS2	IS2-AC	RT-IS1	IS1-AC	RT-A1	A2-AC	A2-IS1	AC-GM	GA-GM
Comp.	110	185	115	210	160	200	130	135	100
Ligação	A1-GA	IS1-A1	RT-IS2	RT-AC	GA-IS1	RT-A2	GA-AC	A2-GA	AC-A1
Comp.	140	180	120	125	155	165	170	175	190

Indique como devem ser colocadas as condutas e apresente o custo da solução proposta.

6. Uma universidade vai implementar um sistema de acessibilidade para utentes portadores de deficiência motora de modo a que estes possam deslocar-se, através de rampas, entre todos os edifícios do campus universitário. O custo estimado da obra é de 100 € / metro linear de rampa. Um banco, que tem uma agência no edifício E1, está disposto a patrocinar 5% do custo total da obra se for construída uma rampa a ligar esse edifício ao edifício onde se encontra a secretaria. As ligações directas a considerar para a construção das rampas e as distâncias entre os respectivos edifícios, em metros, são:

Ligação	(E3, Biblioteca)	(Cantina, E3)	(E3, E2)	(Secretaria, E2)	(E1, E2)
Distância	58	70	60	55	63
Ligação	(Cantina, Biblioteca)	(Cantina, E5)	(E4, E2)	(E3, E5)	(E5, E4)
Distância	72	80	100	86	90
Ligação	(Secretaria, Biblioteca)	(E1, Secretaria)	(E4, E1)	(E3, Secretaria)	
Distância	62	85	95	64	

Qual o traçado de rampas mais económico para a universidade?

7. Numa determinada área florestal vai proceder-se à abertura de caminhos para veículos de combate a incêndios. Os caminhos deverão estabelecer a ligação entre oito clareiras e a sua abertura deverá minimizar os danos causados no meio ambiente. Os caminhos a considerar entre pares de clareiras e os respectivos comprimentos, em metros, são:

Par de clareiras	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)
Comprimento	2000	1900	2400	1100	1800	1000	1200
Par de clareiras	(3,6)	(3,8)	(4,5)	(4,6)	(5,7)	(6,7)	(6,8)
Comprimento	1500	2300	1300	2100	1700	1400	1600

(a) Admitindo que os danos causados no meio ambiente são proporcionais aos comprimentos dos caminhos, indique que caminhos devem ser abertos.

(b) Uma vez que existem pontos de água nas proximidades das clareiras 6, 7 e 8, a existência de pelo menos dois caminhos para veículos de combate a incêndios entre este grupo de clareiras e o grupo das restantes permitirá melhorar a capacidade de resposta a um incêndio. Partindo da solução encontrada em (a), indique a melhor forma de satisfazer esta condição.

8. Um agricultor dividiu um terreno em 6 parcelas P_1, \dots, P_6 onde vai cultivar 4 espécies de fruto: morangos, framboesas, amoras e mirtilos. A seguinte figura ilustra o terreno e a sua divisão em parcelas:

P1	P2	P3	P4	P5
				P6

As capacidades anuais de produção (em toneladas) de cada espécie de fruto em função das parcelas são:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Morangos	1500	1000	1600	1200	1400	1100
Framboesas	800	1150	1100	1075	900	1250
Amoras	1000	950	1150	1100	1050	1000
Mirtilos	1200	1400	1000	1450	1100	1350

Em cada parcela será plantada uma única espécie de fruto e todas as espécies serão produzidas no terreno. As parcelas plantadas com morangos terão de ser adjacentes. As amoras e os mirtilos terão de ser plantados em parcelas não adjacentes. Sabendo que o agricultor pretende maximizar a produção total anual das 4 espécies de fruto, formalize este problema em programação linear inteira.

9. Na primeira fase de uma campanha nacional de vacinação contra a gripe serão disponibilizadas no mercado 50 mil doses de vacinas. Cada pessoa a vacinar receberá duas doses da vacina e, nesta fase, serão vacinadas apenas pessoas pertencentes a grupos prioritários: profissionais de saúde, grávidas no segundo e terceiro trimestres de gestação e idosos. Na tabela seguinte indica-se o número de pessoas, em milhares, de cada grupo prioritário, afetas aos centros de saúde de cada zona geográfica do país.

	Prof. Saúde	Grávidas 2º e 3º trim.	Idosos
Norte	30	25	700
Centro	10	8	600
Lisboa	40	17	300
Sul	20	10	400

Nesta fase, pelo menos 3% dos profissionais de saúde serão vacinados em cada zona geográfica. Considerando que nesta fase da campanha não será possível vacinar todas as pessoas pertencentes aos grupos prioritários, foram estabelecidos os seguintes objetivos, por ordem decrescente de prioridade:

- (1) Vacinar o maior número possível de pessoas.
- (2) Vacinar pelo menos 7 mil profissionais de saúde.
- (3) Distribuir de forma proporcional a vacina pelas grávidas e pelos idosos.

Formalize, como um problema de otimização por metas, o problema cuja solução permitirá planejar a vacinação na primeira fase da campanha. Indique o significado de todas as variáveis e funções que utilizar.

10. Seja $G = (V, E)$ uma rede não orientada com matriz de custos C nas arestas. Mostre que o custo de uma árvore geradora de custo mínimo em G é um minorante do custo da solução ótima do problema do caixeiro viajante em G .