

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Matemática II

9 de Novembro de 2017

Duração: 1 hora

Indique claramente todos os cálculos que efectuar

1. **(6 valores)** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -3 \\ \alpha & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

e a forma quadrática associada $Q(x) = x^T A x$.

- (a) Determine o(s) valor(es) da constante real α para os quais $\lambda = 1$ é um valor próprio de A .
 - (b) Para o menor dos valores de α encontrados na alínea anterior, determine todos os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$.
 - (c) Calcule o valor de $Q(0, 2, 1)$.
 - (d) Classifique a forma quadrática Q .
2. **(5 valores)** Considere a função f definida num subconjunto de \mathbb{R}^2 por

$$f(x, y) = \ln \frac{1 + \sqrt{4 - y - x^2}}{2y + x^2 - 4}.$$

- a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
 - b) Indique analiticamente o interior e a fronteira de D_f . D_f é um conjunto fechado? É limitado? Justifique.
3. **(6 valores)** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^4 y^2}}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua em \mathbb{R}^2 .
 - (b) Determine as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.
 - (c) Determine o conjunto de pontos em que f é diferenciável.
4. **(3 valores)** Seja $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável e suponha que existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in]0, +\infty[.$$

Mostre que para todo $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$f'_v(\lambda x) = \lambda^{\alpha-1} f'_v(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in]0, +\infty[.$$