Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Matemática II

9 de Novembro de 2017

Elementos de solução

1. (a) O polinómio característico da matriz A é

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 10\alpha - 6(1-\lambda) - \alpha^2(2-\lambda).$$

Logo, $p(1) = 0$ se e só se $10\alpha - \alpha^2 = 0$, ou seja, $\alpha = 0$ ou $\alpha = 10$.

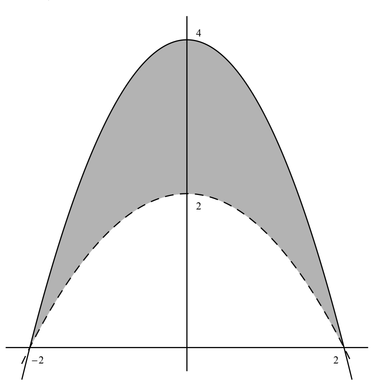
(b) Para $\alpha = 0$, $A - Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ é equivalente por linhas à matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Logo, os vectores próprios associados a $\lambda = 1$ são

$$(3t, -t, 0) \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) $Q(0,2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -3 \\ \alpha & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\alpha - 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -2.$

(d) Tendo em conta que $Q(1,0,0) = 1$ e a alínea anterior, Q é indefinida, qualquer que seja o valor de α.

2. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - y - x^2 \geq 0 \wedge 2y - x^2 - 4 > 0\} =$
$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{4-x^2}{2} < y \leq 4 - x^2\right\}.$



(b) $\mathrm{int}(D_f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{4-x^2}{2} < y \leq 4 - x^2\right\}$,
$\partial D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{4-x^2}{2} \wedge -2 \leq x \leq 2\right\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4 - x^2 \wedge -2 \leq x \leq 2\}.$

D_f não é um conjunto fechado porque não contém a sua fronteira (por exemplo, $(0,2) \in \partial D_f \setminus D_f$).

D_f é limitado porque está contido numa circunferência (por exemplo, $D_f \subset B_5(0,0)$).

3. (a) f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque qualquer função potência com expoente positivo é contínua, somas e productos de funções contínuas são funções contínuas e quocientes de funções contínuas são funções contínuas em todos os pontos que não sejam zeros do denominador.

   Além disso:

$$\left| \frac{\sqrt[3]{x^4}y^2}{x^2+y^4} - 0 \right| \leq \frac{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}\sqrt{x^2+y^4}}{x^2+y^4} = \left(x^2+y^4\right)^{\frac{1}{6}}.$$

   Logo, f é também contínua no ponto $(0,0)$.

   (b) Em qualquer ponto $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^2 \frac{\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}(x^2+y^4) - 2x\sqrt[3]{x^4}}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2\sqrt[3]{x}y^2}{3}\frac{2y^4-x^2}{(x^2+y^4)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \sqrt[3]{x^4}\frac{2y(x^2+y^4) - 4y^3y^2}{(x^2+y^4)^2} = 2\sqrt[3]{x^4}y\frac{x^2-y^4}{(x^2+y^4)^2}.
\end{aligned}$$

   No ponto $(x,y) = (0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{t^4}\times 0}{t^2+0} - 0}{t} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\times t^2}{0+t^4} - 0}{t} = 0.
\end{aligned}$$

   Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \begin{cases} \frac{2\sqrt[3]{x}y^2}{3}\frac{2y^4-x^2}{(x^2+y^4)^2}, & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{para } (x,y) = (0,0), \end{cases} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \begin{cases} 2\sqrt[3]{x^4}y\frac{x^2-y^4}{(x^2+y^4)^2}, & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}
\end{aligned}$$

   (c) A função f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque é contínua e as suas derivadas parciais existem e são contínuas nesse conjunto aberto.

   Note-se que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t^2,t) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}}{\|(t^2,t)\|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\frac{8}{3}+2}}{2|t|^5\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2|t|^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+t^2}} = +\infty.$$

   Logo, f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

4.

$$\begin{aligned}
f'_v(\lambda x) &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\lambda x + tv\right) - f(\lambda x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\lambda (x + \frac{t}{\lambda} v)\right) - f(\lambda x)}{t} = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\lambda^{\alpha}\left(f\left(x + \frac{t}{\lambda} v\right) - f(x)\right)}{t} = \lambda^{\alpha - 1} \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x + \frac{t}{\lambda} v\right) - f(x)}{\frac{t}{\lambda}} = \lambda^{\alpha-1} f'_v(x)
\end{aligned}$$