Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2017/2018
Teste intercalar: 7 de Novembro de 2017
Duração: 1h10m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(7,0) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ln\left(|x^2 - x|\right) < \ln(2)\right\}$ e $B = \left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)(n-1)}{2n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de B.

(c) Escreva o interior e a fronteira de B e o conjunto derivado de A.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\forall \epsilon > 0 \quad B \cap \left]\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon\right[\neq \emptyset$;

ii. $\forall a \in A \ \exists \epsilon > 0 :]a - \epsilon, a + \epsilon[\subseteq A$;

(3,5) 2. Calcule $\lim \left(\sqrt[n]{\dfrac{(2n)^{n+1}}{(n+1)!}} + \dfrac{\cos^2 n}{n} + e^{-n} \right)$.

(3,5) 3. Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(6,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x} & \text{se } x < 0 \\ x \arcsin(-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ k \arctan(x) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(a) Calcule, caso exista, o valor de k de forma a que $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$.

(c) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(d) Prove que existe $c \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ tal que $f(c) = -c$.