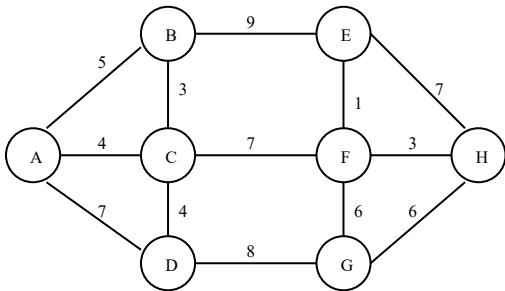


# PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA 2017-2018

## Otimização em Redes

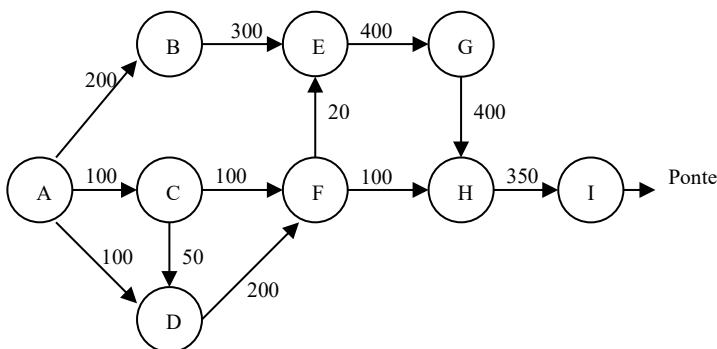
1. Os serviços municipalizados de certa região pretendem levar a energia elétrica às localidades do concelho representadas na figura seguinte.



Os postes para suporte dos cabos elétricos devem ser colocados ao longo das estradas à distância de 100 metros entre si. Os valores da figura acima indicam as distâncias (em quilómetros) entre as localidades.

O fornecedor habitual dos postes oferece neste momento condições excepcionais de aquisição. Quantos postes devem ser encomendados? Justifique.

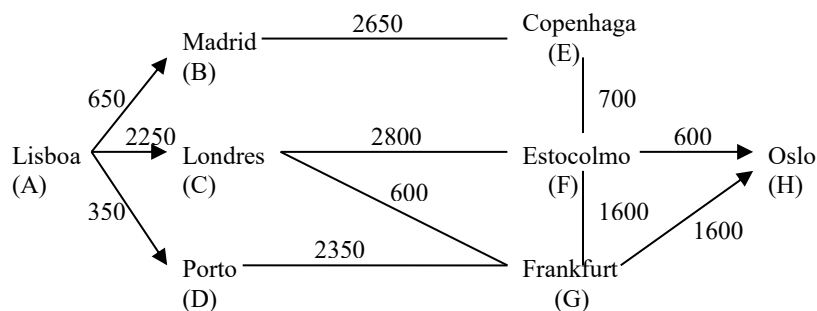
2. Numa pequena cidade situada à beira rio e servida por uma autoestrada (que não a atravessa), vai construir-se uma ponte, pois quase todos os utilizadores da via rápida desejam atravessar o rio e retomar a autoestrada, que recomeça no outro lado do curso de água. (Atualmente a travessia é feita de barco, o que tem vários inconvenientes). A rede das vias subsequentes à autoestrada, e que permitirão o acesso à projetada ponte, tem o seguinte aspeto:



O nodo A representa a autoestrada. As capacidades de circulação/hora estão indicadas na rede.

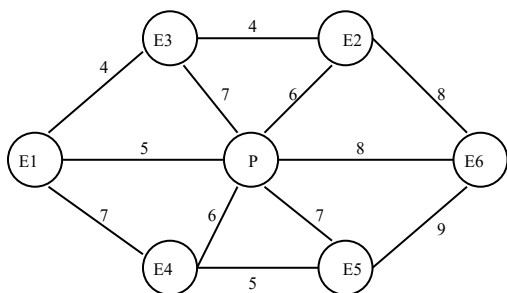
Indique, justificando, qual deverá ser a capacidade mínima de circulação/hora da ponte, de forma que o escoamento de tráfego se faça junto dela sem dificuldade.

3. O gestor de uma empresa necessita de ir de Lisboa a Oslo. Depois de consultadas as agências de viagens, as únicas ligações que interessa considerar para o momento em que terá que ser feita a viagem são as representadas no grafo seguinte, onde os valores sobre os arcos representam as distâncias entre as cidades:



Admitindo que o tempo gasto na viagem pode considerar-se proporcional aos quilómetros percorridos, indique qual o percurso que o gestor deve seguir para minimizar o tempo gasto na viagem.

4. Na construção de uma nova urbanização, com seis edifícios e uma piscina, foram elaborados estudos no sentido de identificar as possíveis localizações para os canos de água. A rede seguinte indica as distâncias entre os diversos pontos:



a) Indique, justificando, as ligações que deverão ser efetuadas de forma a garantir que chegará água a todos os edifícios e à piscina, minimizando a quantidade total de cano gasta.

b) A água da piscina pode ser usada para o combate a incêndios que deflagrem nos edifícios tendo, para esse efeito, sido construídas as ligações:

|                               |         |         |         |         |         |         |
|-------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Arco                          | (P,E1)  | (P,E2)  | (P,E3)  | (P,E4)  | (P,E5)  | (P,E6)  |
| Capac. ( $10^2 \text{ m}^3$ ) | 5       | 6       | 7       | 6       | 7       | 8       |
| Arco                          | (E3,E1) | (E4,E1) | (E2,E3) | (E6,E2) | (E5,E6) | (E5,E4) |
| Capac. ( $10^2 \text{ m}^3$ ) | 4       | 7       | 4       | 8       | 9       | 5       |

Suponha que deflagra um incêndio no edifício E1 no momento em que na piscina existem 1500 m<sup>3</sup> de água. Indique, justificando, a quantidade máxima de água que pode ser utilizada no combate a esse incêndio e as canalizações que serão utilizadas.

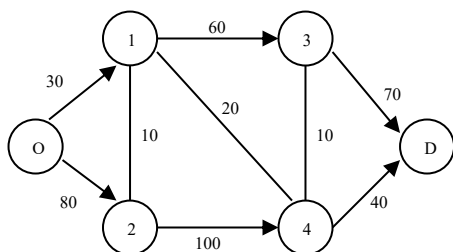
A piscina quando totalmente cheia contém 1800 m<sup>3</sup> de água. Se ela estivesse cheia no momento em que deflagrou o incêndio teria sido possível utilizar toda a água no seu combate? Justifique.

5. Uma agência de viagens vende bilhetes de avião de Lisboa (L) para Tóquio (T). Como não há ligações diretas os seus clientes vão a Amesterdão (A), a Roma (R) ou a Frankfurt (F) tomar o avião. A viagem Amesterdão-Tóquio é direta mas a viagem via Roma ou Frankfurt passa em Bangkok. (B). Os lugares disponíveis em cada ligação são os indicados na tabela:

|   | A   | F   | R   | B   | T   |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| L | 112 | 168 | 230 | -   | -   |
| A | -   | 168 | -   | -   | 285 |
| F | 168 | -   | 180 | 159 | -   |
| R | -   | 180 | -   | 145 | -   |
| B | -   | -   | -   | -   | 262 |

Determine quantos bilhetes pode a agência emitir e indique qual o número máximo de passageiros por itinerário.

6. Considere a seguinte rede de estradas:



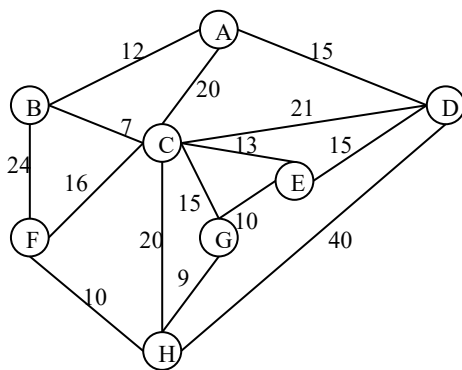
Os números sobre os arcos representam as capacidades de tráfego. Resolva o problema que consiste em orientar as arestas de modo a maximizar a capacidade de tráfego de O para D.

7. Pretende-se construir uma linha de caminho de ferro entre as cidades A e D. Em A apenas se admite uma localização para a estação enquanto que em D há três alternativas para o terminal da referida linha. Os troços possíveis e os respetivos custos (em milhões de u.m.) são dados na tabela:

|    | A | E1 | E2 | E3 | D1 | D2 | D3 |
|----|---|----|----|----|----|----|----|
| A  | - | 6  | 5  | 4  | -  | -  | -  |
| E1 |   | -  | -  | -  | 2  | 3  | -  |
| E2 |   |    | -  | -  | 5  | 6  | 6  |
| E3 |   |    |    | -  | -  | 9  | 9  |
| D1 |   |    |    |    | -  | -  | -  |
| D2 |   |    |    |    |    | -  | -  |
| D3 |   |    |    |    |    |    | -  |

Qual o traçado da linha que minimiza os custos? Justifique.

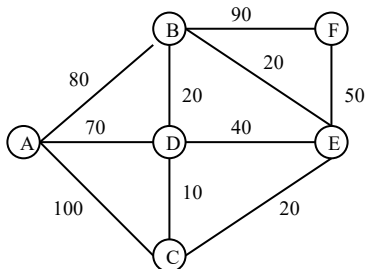
8. Numa cidade vai ser construída uma rede de metropolitano para estabelecer a ligação entre 8 futuras estações. Na rede abaixo estão indicadas as distâncias entre estações (em centenas de metros).



As ligações entre as estações A e F e A e G são consideradas prioritárias, devendo por isso ser o mais curtas possíveis.

- Sabendo que o custo de construção da rede é proporcional ao seu comprimento, determine o traçado da rede de metropolitano que deve ser adotado justificando as suas opções.
- Avalie o impacto das opções prioritárias na solução.

9. Para impulsionar o desenvolvimento económico num concelho do interior do país, foi aprovada a construção de novos troços de estradas IP que farão a ligação entre duas cidades A e F. Na rede abaixo estão representados os traçados possíveis e as distâncias quilométricas entre as localidades. Os troços entre B e D e entre C e E já são atualmente estradas IP. Os custos dos restantes troços da rede são proporcionais aos respetivos comprimentos.



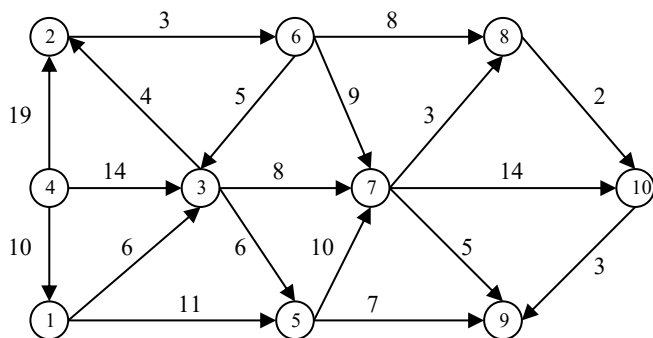
- a) Determine os troços de estradas IP que devem ser construídos. Justifique.
- b) Suponha que, após o estudo de viabilidade e da atribuição do projeto de construção dos novos troços de estradas a uma empresa de obras públicas, a equipa de engenharia responsável pelo projeto constata que, se a ligação entre as cidades A e F passar pela localidade D, terá que ser construído nessa localidade um túnel que custará T unidades monetárias. Explique, cuidadosamente, de que forma este novo dado poderá afetar o projeto inicial e o que deve ser feito para o reavaliar.

10. Uma forte queda de neve, causada por uma súbita vaga de frio que assolou o norte do país, tornou intransitáveis as estradas da região deixando isoladas as cidades C1 e C2 e as aldeias A1 a A6. Para desimpedir as estradas os bombeiros dispõem de um limpa-neves que demora em média duas horas a limpar um quilómetro de estrada. Na tabela abaixo apresentam-se os comprimentos, em quilómetros, das estradas interditadas.

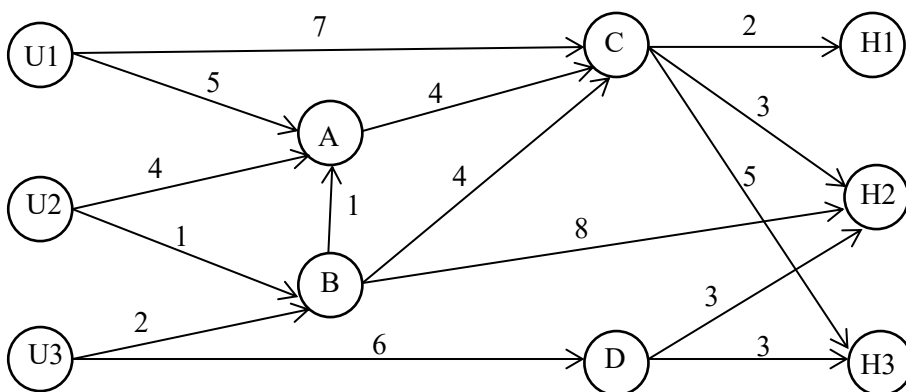
|    | C1 | C2 | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| C1 | -  | -  | 8  | -  | -  | -  | -  | 4  |
| C2 |    | -  | -  | -  | 3  | 9  | -  | -  |
| A1 |    |    | -  | 2  | -  | 4  | -  | -  |
| A2 |    |    |    | -  | 4  | 3  | 6  | 7  |
| A3 |    |    |    |    | -  | 5  | -  | 2  |
| A4 |    |    |    |    |    | -  | 8  | -  |
| A5 |    |    |    |    |    |    | -  | 5  |

Como devem os bombeiros proceder para restabelecer no mais curto espaço de tempo as ligações entre todas as localidades? Quanto tempo irão demorar os bombeiros a resolver o problema? Justifique.

11. Na rede abaixo o nodo 4 representa o local onde irão ser descarregadas ramas de petróleo para posteriormente refinar. As localizações potenciais para a refinaria são representadas pelos nodos 8, 9 e 10. Admitindo que os arcos orientados da rede representam as direções possíveis de circulação no transporte rodoviário das ramas e que os valores junto a cada arco  $(i,j)$  representam o custo de transporte das ramas de  $i$  para  $j$ , determine a localização ótima da refinaria. Justifique.

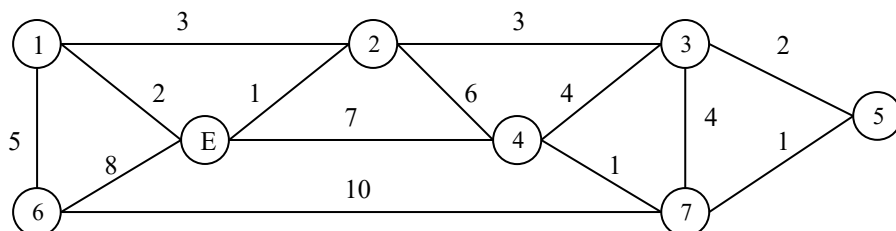


12. Devido à recente escassez de açúcar e à proximidade do Natal, uma empresa que produz açúcar refinado tem de entregar no mais curto espaço de tempo uma tonelada de açúcar em cada um de três hipermercados, H1, H2 e H3. Em cada uma das suas unidades fabris, U1, U2 e U3, a empresa tem três toneladas de açúcar refinado prontas para entrega. Na rede abaixo os arcos orientados representam as direções possíveis do transporte rodoviário do açúcar e os valores junto aos arcos representam o tempo de transporte, em horas.



A produtora de açúcar refinado pretende planear o transporte do açúcar das unidades fabris para os hipermercados de forma a minimizar o prazo de abastecimento de todos os hipermercados. Formalize este problema como um problema de otimização em redes e resolva-o.

**13.** A Polícia de Segurança Pública vai instalar corredores de segurança nas ruas da cidade por onde irão passar as comitivas dos países participantes num encontro sobre questões ambientais. Na rede abaixo o nodo E representa o local do encontro e os nodos 1 a 7 representam os locais de partida das comitivas. As arestas da rede representam o conjunto de ruas possíveis para instalar os corredores de segurança. Os valores junto às arestas representam as distâncias, em centenas de metros, entre os locais.



- a) Em que ruas devem ser instalados os corredores de segurança de modo a que a distância total percorrida pelas comitivas até ao local do encontro seja a menor possível?
- b) Supondo que o número de agentes da polícia necessários para cobrir uma rua é proporcional ao seu comprimento, que implicações tem na solução anterior a instalação de corredores de segurança que minimizam o número total de agentes?

**14.** Com o objetivo de melhorar a segurança nas estradas, vai ser efetuada uma operação de fiscalização rodoviária nas vias que ligam Évora a Beja. Os arcos da rede abaixo representam as vias e o respetivo sentido de circulação do tráfego rodoviário. O valor junto a cada arco representa o custo (em milhares de euros) de instalação de aparelhos de controlo de velocidade na via por ele representada. O responsável pela operação pretende selecionar as vias onde deverão ser instalados os aparelhos de controlo de velocidade para garantir que todos os veículos que efetuam o trajeto de Évora para Beja sejam controlados e que essa instalação tenha o menor custo possível. Formalize e resolva um problema de otimização em redes para identificar as vias que devem ser selecionadas. Apresente o custo total de instalação dos aparelhos.

