Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos

Mestrado em Matemática Financeira

15 de Janeiro 2013

Época Normal - 2 horas

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

1. (1 valor) Seja $\Omega = \{i, s, e, g\}$ e $\mathcal{C} = \{\{i, s, e\}, \{s, e\}\}$. Determine $\sigma(\mathcal{C})$.

2. (6 valores) Seja X uma variável aleatória com função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

   e seja $Y = X^2$. Calcule:

   (a) $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$.

   (b) $P(X \leq 2Y)$.

   (c) a função de distribuição de $Z = \sqrt{X}$.

3. (3 valores) Seja $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), P)$ o espaço de probabilidade onde P é a medida de Lebesgue restrita ao intervalo $[0,1[$ e $X, Y : [0,1[\to \mathbb{R}$ as variáveis aleatórias,

$$X(\omega) = 2\omega^2 \quad \text{e} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 2\omega & 0 \leq \omega < \frac{1}{2} \\ 2\omega - 1 & \frac{1}{2} \leq \omega < 1 \end{cases}.$$

   Determine $E(X|Y)$.

4. (4 valores) Seja $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ o passeio aleatório onde $X_n \in \{-1, 1\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias IID tais que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Supondo que $k \in \mathbb{N}$:

   (a) Mostre que $Z_n = (-1)^n \cos(\pi(S_n + k))$ é uma martingala relativamente à filtração $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

   (b) Calcule $E((-1)^\tau)$ onde τ é o tempo de paragem

   $$\tau = \min\{n \geq 1 : |S_n| = k\} \ .$$

5. (4 valores) Seja $W = \{W_t : t \geq 0\}$ um processo de Wiener. Mostre que

   (a) W é estacionário em média, mas não tem covariâncias estacionárias.

   (b) Dados $0 \leq s < t$ e A Boreliano de $\mathbb{R}$ então,

   $$P(W_t \in A | W_s = w) = \int_A p_{t-s}(x - w) dx \, ,$$

   onde $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}}$.

6. (2 valores) Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ uma filtração e τ um tempo de paragem relativamente a $\mathcal{F}_n$ tal que para algum $k \in \mathbb{N}$ e algum $\epsilon > 0$,

   $$P(\tau \leq n + k \,|\, \mathcal{F}_n) > \epsilon \, , \quad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots$$

   Mostre que $\tau < \infty$ P-q.c.

Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos
Mestrado em Matemática Financeira

31 de Janeiro 2013

Época Recurso - 2 horas

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

1. (1 valor) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, A_3, \ldots$ acontecimentos de $\mathcal{F}$ tais que $P(A_n) = 1$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mostre que $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

2. (6 valores) Seja (X_1, X_2) um vector aleatório bidimensional com a seguinte função de distribuição

$$F(x_1, x_2) = (1 - e^{-x_1})(1 - e^{-x_2}), \quad x_1, x_2 > 0.$$

   Determine:

   (a) $P(1 < X_1 < 2\,,\, 1 < X_2 < 3)$

   (b) A função de densidade de probabilidade conjunta $f(x_1, x_2)$.

   (c) $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$

3. (3 valores) Seja $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), P)$ o espaço de probabilidade onde P é a medida de Lebesgue restrita ao intervalo $[0,1[$ e $X, Y : [0,1[\to \mathbb{R}$ as variáveis aleatórias,

$$X(\omega) = 2\omega^2 \quad \text{e} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 2\omega & 0 \le \omega < \frac{1}{2} \\ 2 - 2\omega & \frac{1}{2} \le \omega < 1 \end{cases}.$$

   Determine $E(X|Y)$.

4. (4 valores) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Uma variável aleatória $\xi : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ tem uma distribuição de Poisson com valor esperado $\mu > 0$ se

$$P(\xi = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Seja $X_0 = 0$ e

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

onde $(\xi_n)_{n \geq 1}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias IID que seguem uma distribuição de Poisson com valor esperado $\mu > 0$.

   (a) Determine os valores de μ para os quais a sucessão $(X_n)_{n \geq 1}$ é uma martingala, submartingala ou supermartingala relativamente à filtração canónica $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

   (b) Suponha que $\mu > 1$. Mostre que:

      i. Existe um único $\rho \in]0, 1[$ tal que $E(\rho^\xi) = \rho$.

      ii. A sucessão ρ^{X_n} é uma martingala relativamente a $\mathcal{F}_n$ e converge P-q.c.

5. (4 valores) Seja $W = \{W_t : t \geq 0\}$ um processo de Wiener. Mostre que

   (a) $E(e^{W_t}) = e^{t/2}$ para todo $t \geq 0$.

   (b) se $c > 0$ então

   $$\left\{ \frac{W_{c^2 t}}{c} : t \geq 0 \right\}$$

   é também um processo de Wiener.

6. (2 valores) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias IID tais que $X_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Considere o tempo de paragem

$$\tau = \min\{n \geq 1 \colon X_1 + \cdots + X_n = 1\}.$$

Determine $E(\tau)$.

Universidade de Lisboa – ISEG
Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática Financeira
1º Semestre 2013/2014

Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos
EXAME ÉPOCA NORMAL
16 de Janeiro de 2014
Duração do exame: 2 horas
Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

1. (2 valores) Seja $\Omega = \{i, s, e, g\}$ e $\mathcal{C} = \{\{i, s, e\}, \{s, e\}\}$. Determine $\sigma(\mathcal{C})$.

2. (6 valores) Seja (X, Y) um vector aleatório bidimensional com a seguinte função de distribuição

$$F(x, y) = \begin{cases} e^{-1/x}(1 - e^{-y}), & x, y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Determine:

(a) $P(1 < X < 2\,,\, 1 < Y < 3)$

(b) A função de densidade de probabilidade conjunta de (X, Y).

(c) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

3. (4 valores) Seja (X, Y) um vector aleatório bidimensional com a seguinte função de densidade conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}\,, & 0 \leq x \leq y < \infty \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$. Determine:

   (a) A função de densidade condicional de Y dado X, $f_{Y|X}$

   (b) A esperança condicional $E(Y|X = x)$

4. (4 valores) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias IID tais que $X_n = \pm 1$ com probabilidade $P(X_n = 1) = p$ e $P(X_n = -1) = q$ onde $p \neq q$. Considere o passeio aleatório,

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n\,,$$

e o tempo de paragem

$$\tau = \min\left\{n \geq 1 : S_n \in \{-a, b\}\right\}\,,$$

onde $a, b > 0$.

   (a) Mostre que a sucessão $Z_n = (q/p)^{S_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ é uma martingala relativamente à filtração $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

   (b) Calcule a probabilidade $P(S_\tau = b)$.

5. (4 valores) Seja $W = \{W_t : t \geq 0\}$ um processo de Wiener. Mostre que

   (a) W é estacionário em média, mas não tem covariâncias estacionárias.

   (b) Dados $0 \leq s < t$ e A Boreliano de $\mathbb{R}$ então,

$$P(W_t \in A | W_s = w) = \int_A p_{t-s}(x - w)dx\,,$$

   onde $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}}$.

Universidade de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática Financeira

1º Semestre 2013/2014

Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos
EXAME ÉPOCA RECURSO
31 de Janeiro de 2014

Duração do exame: 2 horas

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas.

1. (2 valores) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2, A_3, \ldots$ uma sucessão de acontecimentos tais que $P(A_n) = 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Mostre que
$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1\,.$$

2. (6 valores) Seja (X, Y) um vector aleatório bidimensional com a seguinte função de densidade conjunta
$$f(x,y) = \begin{cases} xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,, & x, y > 0 \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

   Determine:

   (a) $P(X > Y)$

   (b) A função de distribuição conjunta de (X, Y).

   (c) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

3. (4 valores) Seja (X, Y) um vector aleatório bidimensional com a seguinte função de densidade conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}\,, & x, y \geq 0 \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

(a) A função de densidade condicional de Y dado X, $f_{Y|X}$

(b) A esperança condicional $E(Y|X = x)$

4. (4 valores) Seja $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ o passeio aleatório onde $X_n \in \{-1, 1\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias IID tais que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Supondo que $k \in \mathbb{N}$:

(a) Mostre que $Z_n = (-1)^n \cos(\pi(S_n + k))$ é uma martingala relativamente à filtração $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Calcule $E((-1)^\tau)$ onde τ é o tempo de paragem

$$\tau = \min\{n \geq 1 : |S_n| = k\}\ .$$

5. (4 valores) Seja $W = \{W_t : t \geq 0\}$ um processo de Wiener. Mostre que

(a) $E(e^{W_t}) = e^{t/2}$

(b) Dados $0 \leq s < t$ e A Boreliano de $\mathbb{R}$ então,

$$P(W_t \in A | W_s = w) = \int_A p_{t-s}(x - w)dx\,,$$

onde $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}}$.

Universidade de Lisboa – ISEG
Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática Financeira
1º Semestre 2014/2015

Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos
EXAME ÉPOCA NORMAL
15 de Janeiro de 2015
Duração do exame: 2 horas
Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas. Entregue a resolução de cada parte em folhas separadas.

PARTE I

1. Seja $\Omega = \{0, 1, 2\}$ e $\mathcal{C} = \{\{0\}\}$. Determine:
   (a) $\sigma(\mathcal{C})$. (1 valor)
   (b) Todas as σ-álgebras que contêm a colecção $\mathcal{C}$. (1 valor)
2. Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e $f\colon X \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Mostre que

$$f_a(x) = \begin{cases} a & , \text{ se } f(x) > a \\ f(x) & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

   é uma função mensurável para todo $a \geq 0$. (2 valores)
3. Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ é a função $f(x) = x^\alpha$ integrável em E relativamente à medida de Lebesgue quando:
   (a) $E = (0, 1)$. (1 valor)
   (b) $E = (1, +\infty)$. (1 valor)

PARTE II

Numa fábrica produz-se sumo de fruta. A venda diária (em milhares de litros) é representada por uma v.a. contínua X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 1 < x < 3 \\ \alpha(6-x), & 3 \leq x < 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

1. Calcule α. (1 valor)

2. Nos dias em que as vendas são superiores a 2 mil litros, qual a probabilidade de se venderem entre 2 e 3.5 mil litros? (1 valor)

3. Com o preço por litro fixado em 0.50 euros, determine a função de distribuição da receita diária supondo que a fábrica tem uma capacidade de produção ilimitada. (2 valores)

4. A fábrica também vende polpa de fruta para a indústria alimentar. A venda diária deste produto (em toneladas) é uma v.a. contínua Y, conhecendo-se a função densidade conjunta

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3} y\, f(x), & 0 < y < 1 \\ \frac{2}{3}(2-y)\, f(x), & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

   Indique o valor esperado de venda de sumo (em milhares de litros) para uma venda diária de 0.5 toneladas de polpa. (2 valores)

PARTE III

1. Seja $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ o passeio aleatório onde $X_n \in \{-1, 1\}$ é uma sucessão de variáveis aleatórias IID tais que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Supondo que $k \in \mathbb{N}$:

   (a) Mostre que $Z_n = (-1)^n \cos(\pi(S_n + k))$ é uma martingala relativamente à filtração canónica $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$. (2 valores)

   (b) O que pode dizer acerca da convergência da martingala Z_n? (1 valor)

   (c) Mostre que
   $$\tau = \min \{n \geq 1 : |S_n| = k\} \ ,$$
   é um tempo de paragem relativamente à filtração canónica. Determine $E(\tau)$. (2 valor)

   (d) Calcule $E((-1)^\tau)$ onde τ é o tempo de paragem da alínea anterior. (1 valor)

2. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma martingala relativamente à filtração canónica $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Mostre que se $(\eta_n)_{n\geq 2}$ uma sucessão de variáveis aleatórias tal que η_n é $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável, então a sucessão $(Z_n)_{n\geq 2}$ definida,
   $$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k (X_k - X_{k-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$
   é uma martingala relativamente a $\mathcal{F}_n$. (2 valores)

Universidade de Lisboa – ISEG
Departamento de Matemática

Mestrado em Matemática Financeira
1º Semestre 2014/2015

Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos
EXAME ÉPOCA RECURSO
29 de Janeiro de 2015
Duração do exame: 2 horas

Resolva os seguintes exercícios, justificando cuidadosamente as suas respostas. Entregue a resolução de cada parte em folhas separadas.

PARTE I

1. Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e A e B dois conjuntos mensuráveis. Mostre que $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$. (2 valores)

2. Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e $f, g : X \to [0, \infty]$ duas funções mensuráveis. Mostre que a função

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } f(x) \geq g(x) \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

é uma função mensurável. (2 valores)

3. Considere a seguinte função de distribuição

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x < -1 \\ 1 + x & , \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ 2 + x^2 & , \text{ se } 0 \leq x < 2 \\ 9 & , \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

e seja μ a medida de Lebesgue-Stieltjes associada a F. Determine:

(a) $\mu([-1/2, 3[)$. (1 valor)

(b) $\mu(]-1, 0] \cup]1, 2[)$. (1 valor)

PARTE II

Numa fábrica produz-se carros. A probabilidade de um carro ter um defeito é de 1%. Os carros são verificados de forma independente à medida que são produzidos. Desta forma, a função de distribuição da v.a. discreta X que indica a ordem do primeiro carro defeituoso é

$$F(x) = 1 - 0.99^x, \quad x \in \mathbb{N}.$$

1. Qual a probabilidade de se verificarem mais de 150 carros até se encontrar um defeituoso, sabendo que os primeiros 100 não apresentam defeitos? (2 valores)

2. Sabendo que custa 10 euros verificar cada carro, calcule quanto se gasta em média até ser detectado um defeito. (Recorde que $\sum_{n\geq 1} nc^{n-1} = (1-c)^{-2}$ para $|c| < 1$.) (2 valores)

3. Considere uma segunda fábrica independente e com probabilidade de um carro ser defeituoso de 5%. Determine a função de distribuição conjunta das v.a. que indicam a ordem do primeiro carro defeituoso de cada fábrica. (2 valores)

PARTE III

1. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de variáveis aleatórias IID tais que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2$. Considere o passeio aleatório $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ e suponha que a evolução do preço Z_n de um certo activo financeiro é dada por
$$Z_n = e^{\mu n + \sigma S_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$.

   (a) Determine μ dependendo de σ tal que Z_n é uma martingala, submartingala ou supermartingala relativamente à filtração canónica $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. (2 valores)

   (b) Supondo que Z_n é uma martingala:

      i. Calcule $E(Z_n)$. (1 valor)

      ii. Mostre que Z_n converge P-q.c. e determine o seu limite. (2 valores)

2. Seja $W = \{W_t \colon t \geq 0\}$ um processo de Wiener e $0 \leq s < t$.

   (a) Determine a densidade de probabilidade condicionada de W_t dado W_s. (1 valor)

   (b) Determine se um processo de Wiener tem covariâncias estacionárias. (2 valores)

University of Lisbon – ISEG

Departament of Mathematics

Probability Theory and Stochastic Processes

EXAM January 15, 2016

Time limit: 2 hours

Each question: 2.5 points

(1) Consider a set Ω, a function $f\colon \Omega \to \Omega$ and

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega \colon f^{-1}(A) = A\}.$$

(a) Show that $(\Omega, \mathcal{F})$ is a measurable space.

(b) Consider a measure μ on $(\Omega, \mathcal{F})$ and $A, B \in \mathcal{F}$ disjoint sets. Find

$$\int_{f^{-1}(B)} \mathcal{X}_A \circ f \, d\mu,$$

where $\mathcal{X}_A$ is the indicator function for the set A.

(2) Compute

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/n} \, dt.$$

(3) Given a sequence of i.i.d. random variables $X_1, X_2 \ldots$ with uniform distribution on $[0,1]$, determine

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{X_1 \ldots X_n}$$

with probability 1.

(4) Let $(\Omega, \mathcal{B}, m)$ be a probability space, where $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ is the Borel σ-algebra of Ω and m is the Lebesgue measure on Ω. Given the random variables $X(\omega) = \omega$ and

$$Y(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & 0 \le \omega \le \frac{1}{2} \\ 2\omega - 1, & \frac{1}{2} < \omega \le 1, \end{cases}$$

compute $E(X|Y)$.

(5) On the finite state space $S = \{1, 2, \ldots, a\}$ consider a homogeneous Markov chain X_n on S with probabilities

$$P(X_1 = j | X_0 = i) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = i \\ \frac{1}{2}, & j = i + 1 \text{ or } (i, j) = (a, 1). \end{cases}$$

(a) Classify the states of the chain and determine their periods.
(b) If possible, find the stationary distributions and the mean recurrence time of each state.

(6) Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $\mathcal{F}_n$ a filtration. Suppose that $(X_n, \mathcal{F}_n)$ and $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ are martingales and T is a stopping time with respect to $\mathcal{F}_n$ and $X_T = Y_T$. Is

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & n < T \\ Y_n, & n \ge T \end{cases}$$

a martingale with respect to $\mathcal{F}_n$?

University of Lisbon – ISEG

Departament of Mathematics

Probability Theory and Stochastic Processes

EXAM February 1, 2016

Time limit: 2 hours

Each question: 2.5 points

(1) Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space.
   (a) Let $A, B \in \mathcal{F}$. If $P(A) = 1$, find $P(B) - P(B \cap A)$.
   (b) Consider a random variable X that can only take two values $a, b \in \mathbb{R}$. Write $\sigma(X)$.
   (c) Consider a function $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ and σ-algebras $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ such that g is $\mathcal{F}_2$-mensurable. Is g also $\mathcal{F}_1$-mensurable?

(2) Compute

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \sin(e^{-x})e^{-nx}\,dx$$

(3) Consider a homogeneous Markov chain with transition matrix given by

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Classify the states of the chain and determine their periods.
   (b) If possible, find the stationary distributions and the mean recurrence time of each state.

(4) Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $X_1, X_2, \ldots$ a sequence of iid random variables with distribution

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Consider the stopping time

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{N} \colon X_n = 1\}$$

with respect to the filtration $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Decide if $X_{\tau \wedge n}$ is a martingale, where $\tau \wedge n = \min\{\tau, n\}$.

(b) Let $S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^i X_i$. Compute $E(S_{\tau-1})$.

University of Lisbon – ISEG

Departament of Mathematics

Probability Theory and Stochastic Processes

EXAM January 18, 2017

Time limit: 2 hours

Each question: 2.5 points

(1) Consider the probability space $(\mathbb{R}, \mathcal{P}, \delta_a)$, where δ_a is the Dirac measure on $\mathbb{R}$ at $a = 2$, and a random variable $X(x) = \sqrt{|x|}$.

(a) Find the distribution and characteristic functions of X.

(b) Write an example of a random variable Y with the same distribution of X.

(2) For each $n \in \mathbb{N}$ consider a random variable X_n with distribution function

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ nx, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Find the limit in distribution of X_n as $n \to +\infty$.

(3) Consider a homogeneous Markov chain with transition matrix given by

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Classify the states of the chain.

(b) Determine the period of each state.

(c) If possible, find the stationary distributions and the mean recurrence time of each state.

(4) Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $X_1, X_2, \ldots$ a sequence of iid random variables with distribution

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Consider the stopping time

$$\tau = \min\{n \in \mathbb{N} \colon X_n = 1\}$$

with respect to the filtration $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Decide if $X_{\tau \wedge n}$ is a martingale, where $\tau \wedge n = \min\{\tau, n\}$.

(b) Let $S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^i X_i$. Compute $E(S_{\tau-1})$.

University of Lisbon – ISEG

Departament of Mathematics

Probability Theory and Stochastic Processes

EXAM February 3, 2017

Time limit: 2 hours

Each question: 2.5 points

(1) Consider the probability space $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$, where m is the Lebesgue measure on $[0,1]$, and the random variable $X(x) = 2x$.

(a) Find the distribution and characteristic functions of X.

(b) Write an example of a random variable Y with the same distribution of X.

(2) Let δ_a be the Dirac measure on $\mathbb{R}$ at a. Consider the sequences

$$a_n = \frac{1-(-1)^n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

and

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{a_i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Show that μ_n is a probability measure for each $n \in \mathbb{N}$ and compute

$$\lim_{n\to+\infty} \int \mathcal{X}_{\{0\}}\, d\mu_n$$

where $\mathcal{X}_{\{0\}}$ is the indicator function at 0.

(3) Consider a homogeneous Markov chain with transition matrix given by

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Classify the states of the chain.

(b) Determine the period of each state.

(c) If possible, find the stationary distributions and the mean recurrence time of each state.

(4) Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $X_1, X_2, \ldots$ a sequence of iid random variables with distribution

$$P(X_n = 1) = \frac{2}{3},$$
$$P(X_n = -1) = \frac{1}{3}.$$

Consider the sum

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) Determine if $Y_n = 2^{-S_n}$ is a martingale with respect to the filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Let τ be the stopping time given by

$$\tau = \min\{n \geq 1 \colon S_n \in \{-1, 2\}\}.$$

Compute the expected value of Y_τ, the probability of $Y_\tau = 1/4$ and the probability of $S_\tau = 2$.

University of Lisbon – ISEG

Departament of Mathematics

Probability Theory and Stochastic Processes

EXAM January 17, 2018

Time limit: 2 hours

Each question: 2.5 points

(1) Consider the probability space $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), P)$, where

$$P(A) = \int_A 2x\, dx, \quad A \in \mathcal{B}([0,1]),$$

and the random variable $X(x) = x^2 - 1$.

(a) Find the distribution of X and its characteristic function.

(b) Write an example of a random variable Y with the same distribution of X.

(2) Given $a \in \mathbb{R}$, consider the Dirac measure on $\mathbb{R}$:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

for any $A \subset \mathbb{R}$, and $\mu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$

(a) Show that $\mu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ is a probability measure and that

$$\int f\, d\mu = \frac{1}{2}\left(\int f\, d\delta_1 + \int f\, d\delta_2\right)$$

for any function $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Compute the expected value of $X(x) = 1/x$ with respect to μ.

(3) Consider a homogeneous Markov chain with states $\{1, 2, 3, 4\}$ and transition matrix

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(a) Classify the states of the chain and determine their periods.

(b) If possible, find the stationary distributions and the mean recurrence time of each state.

(c) Compute

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1 | X_0 = 2).$$

(4) Let X_n be a martingale with respect to the filtration $\mathcal{F}_n$ and τ is a stopping time. Determine $E(X_{\tau \wedge n})$, where $\tau \wedge n = \min\{\tau, n\}$.

University of Lisbon – ISEG

Departament of Mathematics

Probability Theory and Stochastic Processes

EXAM February 2, 2018

Time limit: 2 hours

Each question: 2.5 points

(1) (a) Let Ω be an infinite set and $\mathcal{A}$ the collection of all finite subsets of Ω. Is $\mathcal{A}$ a σ-algebra?

(b) Let Ω be any set and $\mathcal{A} = \{\{x\} \colon x \in \Omega\}$. Determine the σ-algebra generated by $\mathcal{A}$.

(2) Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and X, Y independent random variables. Show that:

(a) $E(XY) = E(X)E(Y)$.

(b) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

(3) Consider a homogeneous Markov chain with states $\{1, 2, 3, 4\}$ and transition matrix

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Classify the states of the chain and determine their periods.

(b) If possible, find the stationary distributions and the mean recurrence time of each state.

(c) Compute

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1 | X_0 = 2).$$

(4) Let X_n be a martingale with respect to the filtration $\mathcal{F}_n$ and τ is a stopping time. Determine $E(X_{\tau \wedge n})$, where $\tau \wedge n = \min\{\tau, n\}$.