Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG

Ficha de exercícios n^o 3

Séries de termos reais

Exercício 1 *Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:*

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \left(n^2+1\right)}{n^2+n+3}$

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^2\sqrt{n}}$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{6n-5}$

f) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

g) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \log n}{n}$.

Exercício 2 *Seja a_n uma sucessão tal que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Prove que a série $\sum a_n^2$ também o é. Dê um exemplo que mostre que o recíproco não é verdadeiro.*

Exercício 3 *Determine os intervalos de convergência das seguintes séries de potências:*

a) $\sum_{n\geq 1} n\,(x-2)^{n-1}$

b) $\sum_{n\geq 1} (n+1)^{-1/2}\,(x+1)^n$

c) $\sum_{n\geq 1} \binom{n+4}{5} x^{4n}$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1.3....\,(2n+1)}{2.4....\,(2n+2)} \frac{1}{n+1} (x-1)^n$.

Exercício 4 *Calcule as somas das seguintes séries nos respectivos intervalos de convergência:*

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$
b) $\sum_{n\geq 1} nx^n$

c) $\sum_{n\geq 1} n^2x^n$

d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}\,(x-1)^{2n+1}$
e) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\,(x-1)^{n+1}$.

Exercício 5 *Desenvolva a função* $\log x$ *em série de potências de* $x-2$, *indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.*

Exercício 6 *Desenvolva a função* $\frac{1}{x^2}$ *em série de potências de* $x+1$, *indicando o maior intervalo em que o desenvolvimento é válido.*

Exercício 7 *Considere a função* $f(x) = e^x$.
a) Calcule a sua série de MacLaurin e prove que a função é soma da sua série de Mac-Laurin para todo o $x \in \mathbb{R}$.
b) Com base na alínea anterior prove que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Exercício 8 *Escreva o desenvolvimento de MacLaurin das seguintes funções:*
a) $f(x) = a^x,\ a > 0$
b) $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$
c) $f(x) = \cos x$.

Exercício 9 *Desenvolva em série de MacLaurin a função* $\log\left(1+x^3\right)$ *e justifique que a função tem um mínimo no ponto* $x = 0$.

Exercício 10 *Desenvolva em série de potências de* $x-1$, *a função* $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = x^2 \log(x^2),$$

indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

Exercício 11 *Desenvolva em série de potências de* $x-2$ *a função* $\dfrac{4}{3x}$, *indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Utilize o resultado obtido para determinar o valor de* $f^{(17)}(2)$.

Exercício 12 *Desenvolva em série de MacLaurin a função* $2^x+\dfrac{1}{2+x}$ *e indique, justificando, o intervalo de convergência da série obtida.*

Exercício 13 *Calcule o polinómio de Taylor de grau 2 da função* $f(x) = \int_1^{u(x)} \ln t dt$ *no ponto* $x = 2$, *sabendo que a função* $u(x)$ *é de classe* $C^2(\mathbb{R})$, *tem por contradomínio o conjunto* $[1,+\infty)$ *e* $u(2)=1$.

Exercício 14 *Utilize a fórmula de MacLaurin para provar a fórmula do Binómio de Newton,*

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n.$$