

Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG

Ficha de exercícios nº 4

Noções Topológicas e Sucessões em \mathbb{R}^n

Exercício 1 Considere o conjunto C das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$. Defina para $f, g \in C$,

$$d^*(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Mostre que $d^*(f, g)$ é uma distância.

Exercício 2 Considere o conjunto E um conjunto qualquer e defina para $x, y \in E$,

$$d^*(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

- a) Mostre que $d^*(x, y)$ é uma distância.
- b) Defina a bola de centro em $a \in E$ e de raio ε .

Exercício 3 Considere em \mathbb{R}^n as seguintes aplicações

$$\|x\|^1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

$$\|x\|^3 = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

- a) Mostre que para $i = 1, 2, 3$, $\|x\|^i$ define uma norma em \mathbb{R}^n .
- b) Para cada uma das normas consideradas calcule $d(x, y) = \|x - y\|$.
- c) Interprete geometricamente as distâncias calculadas.

Exercício 4 Represente geometricamente os seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 e defina analiticamente o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um deles:

- a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \leq 2 \text{ e } xy \geq 0\}$
- b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$
- c) $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq y + x \leq 1 \right\}$
- d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ e } y > 0\} \setminus \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1 \text{ e } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Exercício 5 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Prove que

- A é um conjunto aberto se e só se $A \cap \text{front}A = \emptyset$.
- A é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R}^n \setminus A$ é um conjunto fechado.
- Prove, utilizando o resultado anterior, que a intersecção de conjuntos fechados é sempre um conjunto fechado.

Exercício 6 Considere o seguinte conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$.

- Dê um exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a X que convirja para um ponto que não pertence a X .
- Poderá encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X convergente para um ponto de X ? Justifique.

Exercício 7 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - \ln(x^2 + y^2)} + \sqrt{x - y}.$$

Determine o domínio de f , D_f , represente-o geometricamente e diga, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.

Exercício 8 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{(1 - x)(1 - y)}.$$

- Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f .
- D_f é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.

Exercício 9 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - (y + 1)^2)}.$$

- Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f .
- D_f é um conjunto compacto? Justifique.

Exercício 10 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(1 - \text{sen}x)(y - x^2)}}{\ln(x + y - 2)}.$$

- Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- Defina analiticamente a fronteira de D_f .
- D_f é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.

Exercício 11 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{(x-2)(16-x^2-y^2)}.$$

- a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- b) Indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

Exercício 12 Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \ln(xy) \sqrt{(1-x^2-(y-1)^2)}.$$

- a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- b) Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.