Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG

Ficha de exercícios n^o 5

Limites e Continuidade de Funções em $\mathbb{R}^n$

Exercício 1 *Calcule ou prove que não existem os limites das seguintes funções nos pontos indicados:*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-1}{y-x+1}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x-y}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{x+y-2}{xyz}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \frac{y^2}{x}(z+3)\, sen\,(4x)$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{sen\,(\log(x+y))}$

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2-1}{x-1}$

l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2+(y-1)^2}$

m) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{z+(x-1)z+z^2}{1-xy+zx}.$

Exercício 2 *Seja* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função definida por* $f(x,y) = \left(x^2+y\right) sen\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

a) Justifique que não existe $\displaystyle\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)$ *e não existe* $\displaystyle\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)$.

b) Prove que existe limite da função no ponto $(0,0)$ *e conclua que pode existir limite de uma função num ponto sem que existam os limites iterados.*

Exercício 3 *Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:*

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 seny}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *no ponto* $(0,0)$.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 y^2}{(x-1)^2+y^2} + y & se \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$ *no ponto* $(1,0)$.

c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *no ponto* $(0,0)$.

Exercício 4 *Determine o valor do parâmetro real* α *de modo que a seguinte função tenha limite no ponto* $(1,1)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y} + \alpha & se \quad x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \dfrac{x^2+1}{y^2+1} - \alpha & caso\ contr\acute{a}rio \end{cases}$$

Exercício 5 *Seja* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função definida por* $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$.

a) Para cada $m \in \mathbb{R}$ *e cada* $k \in \mathbb{N}$ *seja* $A_{k,m} = \left\{(x,y) \in D_f : y = mx^k\right\}$. *Calcule para cada par* (k,m) *o limite de* f *no ponto* $(0,0)$ *relativo ao conjunto* $A_{k,m}$.

b) Considere o conjunto $X = \left\{(x,y) \in D_f : y = -x + x^2\right\}$ *e calcule o limite de* f *no ponto* $(0,0)$ *relativo ao conjunto* X.

c) Que pode concluir sobre a existência de limite de f *no ponto* $(0,0)$*?*

Exercício 6 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} k + e^{-\dfrac{1}{|x^2+y^2-4|}} & se \quad x^2+y^2 > 4 \\ 5 & se \quad x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}.$$

Determine o valor de k *de modo a que a função seja contínua em* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 7 *Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade a* $\mathbb{R}^2$*:*

a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$

d) $f(x,y) = xsen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

Exercício 8 *Seja* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função definida por* $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$.
A função pode ser prolongável por continuidade a $\mathbb{R}^2$*? Em caso afirmativo determine o prolongamento contínuo de* f.

Exercício 9 *Determine os pontos de descontinuidade da função* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} & se \;\; x \neq 0 \;\; e \;\; x \neq 1 \\ 1 + y & se \;\; x = 0 \\ y & se \;\; x = 1 \end{cases}$.

Exercício 10 *Considere a função* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x\,(2 - sen x)}{1 - |y|}}$.

a) Determine o domínio de f, D_f, *e represente-o geometricamente.*

b) Defina analiticamente a fronteira de D_f *e indique, justificando, se* D_f *é um conjunto aberto e/ou fechado.*

c) Justifique se f *é prolongável por continuidade ao ponto* $(0,1)$.