



# Cap. 1 Complementos de PL

Sistemas de Apoio à Decisão

Optativa



LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT  
UNIVERSIDADE DE LISBOA



## Complementos de PL

### OBJETIVOS

- Formular problemas em PL e em PLI
- Identificar problemas que podem ser resolvidos por PL / PLI
- Resolver problemas de PL/PLI: Solver/Excel; Gráficos
- Interpretar/Validar soluções

2

## Complementos de PL



### Modelo de PL na forma *standard*

Dados do problema:

$c_j$  **coeficiente** da  $j$ -ésima variável de decisão **na função objetivo**

$b_i$  **segundo membro** ou **termo independente (TI)** da  $i$ -ésima restrição funcional

$a_{ij}$  **coeficiente técnico** da  $j$ -ésima variável de decisão na  $i$ -ésima restrição funcional

Variáveis de decisão:  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )

$$Z^* = \text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{Função objetivo (FO)}$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \quad \text{Restrições funcionais} \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \quad \text{Restrições de sinal} \end{cases}$$

3

## Complementos de PL



### Definições

**Solução** de um PL - vetor de  $\mathbb{R}^n$  cujas componentes representam os valores das variáveis de decisão

**Solução Admissível (SA)** - solução que satisfaça todas as restrições (funcionais e de sinal)

**Solução não admissível (SNA)** - solução que não verifica pelo menos uma das restrições

**Região admissível (RA)** - conjunto de todas as soluções admissíveis

**Solução ótima (SO)** - uma solução admissível que origina o melhor valor para a função objetivo (FO)

**Soluções ótimas alternativas** - diferentes soluções ótimas de um mesmo problema, caso existam

**Valor ótimo** - valor da função objetivo numa solução ótima

**Restrição saturada** numa solução de um problema de PL quando esta a verifica na igualdade

4

## Complementos de PL



### Hipóteses da PL

**Proporcionalidade:** A contribuição de cada atividade ( $j$ ) para o valor da função objetivo e primeiro membro das restrições é proporcional ao nível da atividade

$$a_{ij} x_j; \quad c_j x_j$$

**Aditividade:** Os valores da função objetivo e do primeiro membro das restrições obtêm-se por soma das contribuições individuais das várias atividades

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2; \quad c_1 x_1 + c_2 x_2$$

**Divisibilidade:** As variáveis assumem valores em intervalos reais

**Certeza:** Todos os parâmetros ( $c_j$ ;  $b_i$ ;  $a_{ij}$ ) são constantes reais conhecidas

5

## Complementos de PL



### Propriedades

**Propriedade 1:** A RA de um problema de PL ou é um conjunto vazio ou é um conjunto convexo

**Propriedade 2:** Se a RA de um problema de PL é não vazia e limitada, então existe solução ótima

**Propriedade 3:** Se um problema de PL tem ótimo, então pelo menos um dos pontos extremos da RA é solução ótima

**Propriedade 4:** Dado um problema de PL com ótimo, se um ponto extremo da região admissível não tem pontos extremos adjacentes com melhor valor para a função objetivo, então esse ponto extremo é solução ótima

6

## Resolução Gráfica



### Resolução Gráfica - 2 Variáveis de Decisão

- 1)  $RA = \cap$  de semiplanos definidos por todas as restrições de sinal e funcionais do PL
- 2) Se  $RA = \emptyset$  o problema é impossível
- 3) Se  $RA \neq \emptyset$  identificar, caso exista, o(s) ponto(s) ótimo(s):
  - Representar uma reta de nível da FO (atribuindo um valor arbitrário a  $Z$ ) e identificar o sentido de otimização
  - Identificar o(s) ponto(s) da RA a que corresponde o melhor valor de  $Z$  (ou seja, identificar as SOs), ou concluir que o problema tem valor ótimo ilimitado (não tem solução ótima)

7

## Resolução no Solver



		Dados				
	A	B	C	D	E	F
1	<b>Exemplo 1</b>					Disponibilidades/ Exigências
2		P1	P2			
3	Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	0	<=	10
4	Secção de Embalagem (h.m.)	2	8	0	<=	32
5	Imposição de mercado	1	-1	0	>=	2
6	lucro (u.m.)	2	4	0		
7	Unidades a produzir de	0	0			

	D
3	=SUMPRODUCT(B3:C3;B\$7:\$C\$7)
4	=SUMPRODUCT(B4:C4;B\$7:\$C\$7)
5	=SUMPRODUCT(B5:C5;B\$7:\$C\$7)
6	=SUMPRODUCT(B6:C6;B\$7:\$C\$7)

Valores Iniciais

8

## Resolução no Solver

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Exemplo 1</b>					
2		P1	P2			Disponibilidades/ Exigências
3	Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	0	<=	10
4	Secção de Embalagem (h.m)	2	8	0	<=	32
5	Imposição de mercado	1	-1	0	>=	2
6	lucro (u.m.)	2	4	0		
7	Unidades a produzir de	0	0			

Solver Parameters

Set Objective:

To:  Max  Min  Value Of: 0

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

Add Constraint

Cell Reference:

## Resolução no Solver

Solver Parameters

Set Objective:

To:  Max  Min  Value Of: 0

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method  
Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

## Resolução no Solver

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Exemplo 1</b>					Disponibilidades/ Exigências
2		P1	P2			
3	Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	10	<=	10
4	Secção de Embalagem (h.m)	2	8	32	<=	32
5	Imposição de mercado	1	-1	6	>=	2
6	lucro (u.m.)	2	4	24		
7	Unidades a produzir de	8	2			

**Solver Results**

Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

Keep Solver Solution
 
 Reports  
 Answer  
 Sensitivity  
 Limits

Restore Original Values
 
 Return to Solver Parameters Dialog  
 Outline Reports

**Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.**

When the GRG engine is used, Solver has found at least a local optimal solution. When Simplex LP is used, this means Solver has found a global optimal solution.

11

## Resolução no Solver

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>Microsoft Excel 14.0 Answer Report</b>											
2	Worksheet: [ex1_PL.xls]ex1											
3	Report Created: 08-02-2012 11:50:32											
4	Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.											
5	<b>Solver Engine</b>											
6	Engine: Simplex LP											
7	Solution Time: 0 Seconds.											
8	Iterations: 3 Subproblems: 0											
9	<b>Solver Options</b>											
10	Max Time 100 sec, Iterations 100, Precision 0,000001											
11	Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 5%, Solve Without Integer Constraints, Assume NonNegative											
12												
13												
14	<b>Objective Cell (Max)</b>											
15	<b>Cell</b>	<b>Name</b>	<b>Original Value</b>	<b>Final Value</b>								
16	\$D\$6	lucro (u.m.)	0	24								
17												
18												
19	<b>Variable Cells</b>											
20	<b>Cell</b>	<b>Name</b>	<b>Original Value</b>	<b>Final Value</b>	<b>Integer</b>							
21	\$B\$7	Unidades a produzir de P1	0	8	Contin							
22	\$C\$7	Unidades a produzir de P2	0	2	Contin							
23												
24												
25	<b>Constraints</b>											
26	<b>Cell</b>	<b>Name</b>	<b>Cell Value</b>	<b>Formula</b>	<b>Status</b>	<b>Slack</b>						
27	\$D\$3	Secção de Fabrico (h.m.)	10	\$D\$3<=\$F\$3	Binding	0						
28	\$D\$4	Secção de Embalagem (h.m)	32	\$D\$4<=\$F\$4	Binding	0						
29	\$D\$5	Imposição de mercado	6	\$D\$5>=\$F\$5	Not Binding	4						
30												

12

## Resolução no Solver

	A	B	C	D	E	F	G	H																												
1	Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report																																			
2	Worksheet: [ex1_PL.xls]ex1																																			
3	Report Created: 08-02-2012 11:50:32																																			
4																																				
5																																				
6	Variable Cells																																			
7	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Cell</th> <th>Name</th> <th>Final Value</th> <th>Reduced Cost</th> <th>Objective Coefficient</th> <th>Allowable Increase</th> <th>Allowable Decrease</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$B\$7</td> <td>Unidades a produzir de P1</td> <td>8</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>\$C\$7</td> <td>Unidades a produzir de P2</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>								Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease	\$B\$7	Unidades a produzir de P1	8	0	2	2	1	\$C\$7	Unidades a produzir de P2	2	0	4	4	2							
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease																														
\$B\$7	Unidades a produzir de P1	8	0	2	2	1																														
\$C\$7	Unidades a produzir de P2	2	0	4	4	2																														
11																																				
12	Constraints																																			
13	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Cell</th> <th>Name</th> <th>Final Value</th> <th>Shadow Price</th> <th>Constraint R.H. Side</th> <th>Allowable Increase</th> <th>Allowable Decrease</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$D\$3</td> <td>Secção de Fabrico (h.m.)</td> <td>10</td> <td>1,333333333</td> <td>10</td> <td>6</td> <td>2,4</td> </tr> <tr> <td>\$D\$4</td> <td>Secção de Embalagem (h.m.)</td> <td>32</td> <td>0,333333333</td> <td>32</td> <td>12</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>\$D\$5</td> <td>Imposição de mercado</td> <td>6</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1E+30</td> </tr> </tbody> </table>								Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease	\$D\$3	Secção de Fabrico (h.m.)	10	1,333333333	10	6	2,4	\$D\$4	Secção de Embalagem (h.m.)	32	0,333333333	32	12	12	\$D\$5	Imposição de mercado	6	0	2	4	1E+30
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease																														
\$D\$3	Secção de Fabrico (h.m.)	10	1,333333333	10	6	2,4																														
\$D\$4	Secção de Embalagem (h.m.)	32	0,333333333	32	12	12																														
\$D\$5	Imposição de mercado	6	0	2	4	1E+30																														
14																																				
15																																				
16																																				
17																																				

13

## Resolução no Solver -2003

**Solver Parameters**

Set Target Cell:

Equal To:  Max  Min  Value of:

By Changing Cells:

Subject to the Constraints:

**Solver Options**

Max Time:  seconds

Iterations:

Precision:

Tolerance:  %

Convergence:

Assume Linear Model  Use Automatic Scaling

Assume Non-Negative  Show Iteration Results

Estimates:  Tangent  Quadratic

Derivatives:  Forward  Central

Search:  Newton  Conjugate

14

## Resolução no Solver – 2003



	A	B	C	D	E	F	G
2			de portas	de janelas			Disponibilidades
3		h-m de F1	1	0	2	≤	4
4		h-m de F2	0	2	12	≤	12
5		h-m de F3	3	2	18	≤	18
6		Lucro	3	5	36		
7		Nº de lotes	2	6			
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							

**Solver Results**

Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.

Keep Solver Solution  
 Restore Original Values

Reports

- Answer
- Sensitivity
- Limits

OK Cancel Save Scenario... Help

15

## Resolução no Solver – 2003



Microsoft Excel 10.0 Answer Report  
 Worksheet: [ex\_prototipo.xls]Ex. Protótipo  
 Report Created: 30-09-2009 11:40:41

## Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$6	Lucro	0	36

## Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$C\$7	Nº de lotes de portas	0	2
\$D\$7	Nº de lotes de janelas	0	6

## Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$3	h-m de F1	2	\$E\$3<=\$G\$3	Not Binding	2
\$E\$4	h-m de F2	12	\$E\$4<=\$G\$4	Binding	0
\$E\$5	h-m de F3	18	\$E\$5<=\$G\$5	Binding	0

16