Probabilidades e Combinatória

Revisões e complementos aos tópicos abordados no 12º ano

1. Experiência aleatória é uma experiência com as seguintes características:
   – pode repetir-se tantas vezes quantas se queira, nas mesmas condições;
   – são conhecidos os resultados possíveis;
   – não é possível determinar o resultado de qualquer das repetições.

2. Espaço de resultados de uma experiência aleatória é o conjunto dos resultados que podem ser observados quando a experiência é efectuada. Representa-se habitualmente por Ω ou S e pode ser um conjunto finito, um conjunto infinito numerável ou um conjunto infinito não numerável.

3. Dada uma experiência aleatória com espaço de resultados Ω:
   – dá-se o nome de acontecimento a todo o subconjunto de Ω.
   – diz-se que um acontecimento A se realiza quando o resultado observado na experiência é um dos elementos de A.
   – acontecimento certo é um acontecimento que se realiza qualquer que seja o resultado observado na experiência. Representa-se por Ω.
   – acontecimento impossível é um acontecimento que nunca se realiza. Representa-se por $\varnothing$.
   – acontecimento elementar é um acontecimento que corresponde a um subconjunto singular de Ω (quando um acontecimento não é elementar diz-se um acontecimento composto).
   – espaço dos acontecimentos é o conjunto de todos os subconjuntos de Ω.

4. Acontecimento *União* dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza quando, pelo menos, um dos dois acontecimentos se realiza. Representa-se por $A \cup B$.

5. Acontecimento *Intersecção* dos acontecimentos A e B é o acontecimento que se realiza quando A e B se realizam simultaneamente. Representa-se por $A \cap B$.

6. Os acontecimentos A e B dizem-se incompatíveis quando $A \cap B = \varnothing$, isto é, A e B não podem realizar-se simultaneamente.

7. Acontecimento *Diferença* entre os acontecimentos C e A é o acontecimento que se realiza quando C se realiza, sem que A se realize também. Representa-se por $C \setminus A$.

8. Acontecimento *Complementar*, ou *Contrário*, do acontecimento A é o acontecimento que se realiza quando A não se realiza. Representa-se por $\overline{A}$.

9. Diz-se que a realização de um acontecimento B implica a realização de um acontecimento A quando B não pode realizar-se sem que A se realize também. Escreve-se $B \subset A$.

10. Algumas propriedades das operações com acontecimentos (usa-se a notação habitual):

	União	Intersecção
Associatividade	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Comutatividade	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributividade	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotência	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

Absorção	$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$	$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
Modulares	$A \cup \Omega = \Omega;\ \ A \cup \varnothing = A$	$A \cap \Omega = A;\ \ A \cap \varnothing = \varnothing$
Leis de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Dupla negação	$\overline{\overline{A}} = A$	
$A \setminus B = A \setminus \left(A \cap B\right) = A \cap \overline{B}$		

11. Abordagem frequencista de probabilidade:
    Probabilidade de um acontecimento A é o valor para que tende a frequência relativa desse acontecimento, quando se repete a experiência aleatória um elevado número de vezes.
    Representa-se por $P(A)$.

12. Definição clássica de probabilidade (Lei de Laplace):
    Considere-se uma experiência aleatória em que Ω tem n elementos, sendo equiprováveis os correspondentes n acontecimentos elementares. Seja A um acontecimento composto por m desses acontecimentos elementares. Então, a probabilidade de A é $P(A) = \dfrac{\text{nº de casos favoráveis}}{\text{nº de casos possíveis}} = \dfrac{m}{n}$.

13. Definição axiomática de probabilidade:
    Probabilidade é toda a aplicação P, com domínio igual ao espaço dos acontecimentos e conjunto de chegada igual a R, que a cada acontecimento A faz corresponder um número real, seja $P(A)$, de modo a satisfazer os axiomas seguintes:
    A1: $P(\Omega) = 1$.
    A2: $P(A) \geq 0$, $\forall A \in$ espaço dos acontecimentos.
    A3: $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B),\ \ A, B \in$ espaço dos acontecimentos.
    O número $P(A)$ é designado a probabilidade do acontecimento A.
    É fácil verificar que a abordagem frequencista e a definição clássica de probabilidade respeitam esta axiomática (axiomática de Kolmogorov - caso finito).

14. Primeiros teoremas:
    T1: Se $\varnothing$ é o acontecimento impossível, então $P(\varnothing) = 0$.
    T2: Se $\overline{A}$ é o acontecimento contrário do acontecimento A, então $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
    T3: Se a realização do acontecimento B implica a realização do acontecimento A, então $P(B) \leq P(A)$.
    T4: $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in$ espaço dos acontecimentos.
    T5: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $\forall A, B \in$ espaço dos acontecimentos.

15. Sejam A e B acontecimentos associados à mesma experiência aleatória, e tais que $P(B) > 0$. Chama-se probabilidade condicionada de A, dado B (ou A, se B), ao valor do quociente $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Representa-se por $P\left(A \mid B\right)$.
    Também é fácil verificar que a definição de probabilidade condicionada respeita a axiomática.

16. Da definição de probabilidade condicionada de A, dado B (ou A, se B), resulta que $P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)$.

17. Diz-se que os acontecimentos A e B, associados à mesma experiência aleatória, são independentes se e só se $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$. Se as probabilidades condicionadas estiverem definidas, isto equivale a ter-se $P(A|B)=P(A)$ e $P(B|A)=P(B)$.

18. A definição de independência pode generalizar-se a mais de dois acontecimentos.
Por exemplo, os acontecimentos A, B e C dizem-se mutuamente independentes se e só se $P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B)\times P(C)$; $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$; $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$; $P(B\cap C)=P(B)\times P(C)$.

19. Diz-se que os acontecimentos $A_1, A_2, ..., A_n$ constituem uma partição de Ω se e só se:
   - $A_1, A_2, ..., A_n$ são mutuamente incompatíveis, isto é, $A_i \cap A_j = \varnothing;\ i, j = 1, 2, ..., n;\ i \neq j$;
   - $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

20. Teorema da Probabilidade Total
Seja $A_1, A_2, ..., A_n$ uma partição do espaço de resultados Ω, de dada experiência aleatória.
Se as probabilidades $P(A_i)>0,\ i=1,2,...,n,$ então, para todo o acontecimento B $(B\subset\Omega)$, tem-se
$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+...+P(B|A_n)P(A_n).$$

21. Princípio fundamental da contagem
Se um resultado é composto por uma "sequência" de k resultados, em que cada um deles pode ocorrer, respectivamente, de $n_1, n_2, ..., n_k$ maneiras diferentes, então o resultado dado pode ocorrer de $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ maneiras diferentes.

22. Dado um conjunto com n objectos distintos:
   - chama-se permutação dos n objectos a cada uma das diferentes formas de os dispor. O número de permutações é $P_n = n!$
   - chama-se arranjo completo dos n objectos, tomados p a p, a cada uma das diferentes formas de dispor p objectos, escolhidos ao acaso, sucessivamente e com reposição, do conjunto dos n objectos $(p\le n)$. O número de arranjos completos é ${}^{n}A'_p = n^p$
   - chama-se arranjo simples dos n objectos, tomados p a p, a cada uma das diferentes formas de dispor p objectos, retirados ao acaso, sucessivamente e sem reposição, do conjunto dos n objectos $(p\le n)$. O número de arranjos simples é ${}^{n}A_p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
   - chama-se combinação dos n objectos, tomados p a p, a cada um dos diferentes subconjuntos com p objectos, retirados ao acaso e sem reposição, do conjunto dos n objectos $(p\le n)$. O número de combinações é $\dbinom{n}{p} = \dfrac{{}^{n}A_p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$.

23. Dado um conjunto com n objectos não todos distintos, sendo n_1 do tipo 1, n_2 do tipo $2,\ldots,n_t$ do tipo t, chama-se permutação dos n objectos a cada uma das diferentes formas de os dispor. Uma vez que os objectos de um mesmo tipo são indistinguíveis, o número dessas permutações é dado pelo quociente $\frac{P_n}{n_1!n_2!\ldots n_t!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$.

24. Outros resultados:
T6: $P(A\setminus B)=P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)$.
T7: T5 pode generalizar-se. Por exemplo, com três acontecimentos, vem
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$
T8: $P\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)$.
T9: $P\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=P)(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.
T10: $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)=1-P(A\cup B\cup C)$.

25. Os resultados vistos ainda se aplicam, com as necessárias adaptações, quando se trata de uma probabilidade condicionada.
Demonstra-se também a chamada regra de multiplicação de probabilidades (generalizável a mais de três acontecimentos):
T11: $P(A\cap B)=P(A\mid B)\times P(B)$.
T12: $P(A\cap B\cap C)=P(A\mid B\cap C)\times P(B\mid C)\times P(C)$.

26. Teorema de Bayes
Seja $A_1,A_2,\ldots,A_n$ uma partição de Ω e seja B um acontecimento, tal que $P(B)>0$. Então,

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+\ldots+P(B\mid A_n)P(A_n)},\ i=1,2,\ldots,n..$$

Demonstração:
Basta notar que:

1. $P(A_i\mid B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}$ e $P(A_i\cap B)=P(B\mid A_i)\times P(A_i)$, pela definição de probabilidade condicionada;

2. $P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+\ldots+P(B\mid A_n)P(A_n)$, pelo teorema da probabilidade total.

27. Definição axiomática de probabilidade – caso infinito

Na definição axiomática de probabilidade foi dito que ‘Probabilidade é toda a aplicação P, com domínio igual ao espaço dos acontecimentos...’ Por sua vez, o espaço dos acontecimentos foi definido como ‘o conjunto de todos os subconjuntos de Ω’.

Na realidade, o que se pretende é que o domínio da aplicação P seja uma classe $\mathcal{A}$ (de subconjuntos de Ω), que contenha todos os subconjuntos do espaço de resultados relevantes para a experiência aleatória, **desde que seja possível atribuir-lhes uma probabilidade.** Na realidade, convenciona-se que só a estes subconjuntos se dá a designação de **acontecimentos**.

Por outras palavras, deve verificar as propriedades de σ-álgebra, isto é:

- $\varnothing \in \mathcal{A}$ e $\Omega \in \mathcal{A}$
- Se $A \in \mathcal{A}$, então $\overline{A} \in \mathcal{A}$
- Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$

Quando o espaço dos resultados é um conjunto finito, ou infinito numerável, toma-se mesmo $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, a classe fundamental, ou conjunto de todos os subconjuntos de Ω. Quando este é um conjunto infinito não numerável, toma-se a classe dos Borelianos[1]. Em qualquer dos casos, fica garantido que:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $\varnothing \in \mathcal{A}$
- Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$
- Se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \setminus B \in \mathcal{A}$
- Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, então $\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$

No caso infinito, a axiomática é reformulada, em particular o axioma A3, que dá lugar a

A3*: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ e mutuamente exclusivos $\Rightarrow P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$

Todos os resultados anteriores continuam válidos e ainda se demonstram outros.

---

[1] Um conjunto $B \in R$ diz-se um conjunto de Borel, ou Boreliano, quando pode ser obtido a partir das operações ∩, ∪ e passagem ao complementar, efectuadas sobre os conjuntos da classe $\mathcal{I}$ dos intervalos de números reais do tipo $(a,b], a \leq b$. Os conjuntos abertos, os conjuntos fechados e os conjuntos numeráveis são Borelianos.

28. Teorema:

T13: Sendo $A_1, A_2, ...$ acontecimentos ($A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$), então $P\left(\bigcup_i A_i\right) \le \sum_i P(A_i)$.

Demonstração:

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = P\left(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \left(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\right) \cup \left(A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\right) \cup ...\right)$$

Uma vez que $A_1,\ A_2 \setminus A_1,\ A_3 \setminus (A_1 \cup A_2),\ A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3), ...$ são claramente acontecimentos mutuamente exclusivos, vem, por A3*,

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + P\left(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\right) + P\left(A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\right) + ...$$

Notando que

$P(A_2 \setminus A_1) \le P(A_2),\ P\left(A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\right) \le P(A_3),\ P\left(A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\right) \le P(A_4), ...,$ vem então $P\left(\bigcup_i A_i\right) \le \sum_i P(A_i)$, como se pretendia.

29. Limite de uma sucessão de acontecimentos:

Seja $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ uma sucessão de acontecimentos.

Chama-se limite inferior da sucessão, e representa-se por $\underline{\lim} A_n$, ao acontecimento

$$\underline{\lim} A_n = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ...) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap ...) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap ...) \cup ...$$

Chama-se limite superior da sucessão, e representa-se por $\overline{\lim} A_n$, ao acontecimento

$$\overline{\lim} A_n = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...) \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup ...) \cap (A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup ...) \cap ...$$

Quando $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$, diz-se que a sucessão tem limite, que se representa por $\lim A_n$. Diz-se então que $\lim A_n$ é o limite da sucessão, ou acontecimento limite.

É fácil verificar que, sendo $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ uma sucessão monótona crescente de acontecimentos, isto é, tal que $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$, se tem $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \lim A_n = \bigcup_i A_i$. Do mesmo modo, se $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ é uma sucessão monótona decrescente de acontecimentos, vem $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \lim A_n = \bigcap_i A_i$.

30. Teorema:

T14: Seja $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ uma sucessão de acontecimentos e seja $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n), ...$ a sucessão das respectivas probabilidades. Se $\lim A_n$ existe, então também existe $\lim P(A_n)$ e tem-se $\lim P(A_n) = P(\lim A_n)$.