Exercícios de Cálculo Estocástico

João Guerra

10/02/2012

Conteúdo

1 Exercícios - Parte 1 **2**

2 Problemas de exame - A **9**

3 Soluções A **11**

4 Problemas de Exame - B **17**

5 Problemas de Exame - C **20**

Esta lista de exercícios (e soluções) foi elaborada para a unidade curricular de "Cálculo Estocástico"do Mestrado em Matemática Financeira, ISEG, Universidade Técnica de Lisboa, no ano lectivo de 2011/2012.

Capítulo 1

Exercícios - Parte 1

Exercício 1.1 *Mostrar que se um processo X é Gaussiano e fortemente estacionário então $\mu_X(t) = \mu_X(0)$, $\forall t \in T$ e $c_X(s,t) = f(|s-t|)$ é só função da distância $|s-t|$.*

Exercício 1.2 *Mostre que se X é um processo de Poisson então $X_t - X_s \sim Poi(\lambda(t-s))$ se $t > s$.*

Exercício 1.3 *Prove que se X e a σ-álgebra $\mathcal{B}$ são independentes então $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$*

Solução: Se X e $\mathbf{1}_A$ são independentes então se $A \in \mathcal{B}$, temos que

$$E[X\mathbf{1}_A] = E[X]\,E[\mathbf{1}_A] = E[E[X]\,\mathbf{1}_A]$$

e, por definição de esperança condicionada, $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$.

Exercício 1.4 *Prove que se Y é $\mathcal{B}$-mensurável então*

$$E(YX|\mathcal{B}) = YE(X|\mathcal{B}).$$

Solução: Se $Y = \mathbf{1}_A$ e $A, B \in \mathcal{B}$, temos, por definição de esperança condicionada,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{B})\mathbf{1}_B] &= E[\mathbf{1}_{A\cap B}E(X|\mathcal{B})] \\ &= E[X\mathbf{1}_{A\cap B}] = E[\mathbf{1}_B\mathbf{1}_A X]. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{B}) = E[\mathbf{1}_A X|\mathcal{B}]$. Da mesma forma, obtemos o resultado se $Y = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{1}_{A_j}$ (função em escada $\mathcal{B}$-mensurável). O resultado no caso geral prova-se aproximando Y por uma sucessão de funções em escada $\mathcal{B}$-mensuráveis.

Exercício 1.5 *Dada a variável aleatória* $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *mostre que* $E(X|\mathcal{B})$ *é a projecção ortogonal de* X *no subespaço* $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *e que*

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X-Y)^2\right]$$

Solução: (1) $E(X|\mathcal{B}) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, pois é $\mathcal{B}$-mensurável e pela desigualdade de Jensen, temos que

$$E\left[|E(X|\mathcal{B})|^2\right] \leq E(|X|^2) < \infty.$$

Exemplo 1.6 *(2) Se* $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *temos, pelas propriedades 2 e 5 da esperança condicional,*

$$\begin{aligned} E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))\, Z\right] &= E[XZ] - E[E(X|\mathcal{B})Z] \\ &= E[XZ] - E[E(XZ|\mathcal{B})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e portanto $(X - E(X|\mathcal{B}))$ *é ortogonal a* $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

(3) Como

$$E\left[(X-Y)^2\right] = E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] + E\left[(E(X|\mathcal{B}) - Y)^2\right]$$

temos que $E\left[(X-Y)^2\right] \geq E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right]$ *e portanto*

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X-Y)^2\right].$$

Exercício 1.7 *Prove as propriedades 1,2, 4 e 6 da esperança condicional (ver texto de apoio teórico)*

Exercício 1.8 *Prove que se o processo* $M = \{M_n; n \geq 0\}$ *é uma martingala, então*

$$E[M_n] = E[M_0], \quad \forall n \geq 1.$$

Exercício 1.9 *Seja* $M = \{M_n; n \geq 0\}$ *uma* $\{\mathcal{F}_n\}$*-martingala. Prove que se* $m \geq n$ *então* $E[M_m|\mathcal{F}_n] = M_n$.

Exercício 1.10 *Prove que se* $B = \{B_t; t \geq 0\}$ *é um movimento Browniano então, para qualquer* $a > 0$, *o processo* $\left\{a^{-1/2}B_{at}; t \geq 0\right\}$ *tb. é um mov. Browniano.*

Exercício 1.11 *Prove que se u e v são processos simples, então*

$$\int_0^T (au_t + bv_t)\, dB_t = a \int_0^T u_t dB_t + b \int_0^T v_t dB_t. \tag{1.1}$$

e

$$E\left[\int_0^T u_t dB_t\right] = 0. \tag{1.2}$$

Exercício 1.12 *Prove que*

$$\int_a^b u_s \mathrm{d}B_s + \int_b^c u_s \mathrm{d}B_s = \int_a^c u_s \mathrm{d}B_s.$$

Exercício 1.13 *Prove diretamente, usando a definição de integral estocástico, que*

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds. \tag{1.3}$$

Sugestão: Note que

$$\sum_j \Delta\left(s_j B_j\right) = \sum_j s_j \Delta B_j + \sum_j B_{j+1} \Delta s_j. \tag{1.4}$$

Exercício 1.14 *Considere uma função determinística g tal que $\int_0^T g(s)^2 ds < \infty$. Mostre que o integral estocástico $\int_0^T g(s)\, dB_s$ é uma variável aleatória Gaussiana e determine a sua média e a sua variância.*

Exercício 1.15 *Seja $B_t := (B_t^1, B_t^2)$ um movimento Browniano bidimensional. Represente o processo*

$$Y_t = \left(B_t^1 t, \left(B_t^2\right)^2 - B_t^1 B_t^2\right)$$

como um processo de Itô.

Solução: Pela fórmula de Itô multidimensional, com $f(t,x) = f(t, x_1, x_2) = (x_1 t, x_2^2 - x_1 x_2)$, temos

$$\begin{aligned} dY_t^1 &= B_t^1 dt + t dB_t^1, \\ dY_t^2 &= -B_t^2 dB_t^1 + \left(2B_t^2 - B_t^1\right) dB_t^2 + dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \int_0^t B_s^1 ds + \int_0^t s dB_s^1, \\ Y_t^1 &= -\int_0^t B_s^2 dB_s^1 + \int_0^t \left(2B_s^2 - B_s^1\right) dB_s^2 + t. \end{aligned}$$

Exercício 1.16 *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais estocásticas:*

$$dX(t) = 4e^{2t}\,dt + t\,dW(t) \text{ com } X(0) = 10.$$

$$dZ(t) = \left(t^2 + 3\sin t\right)\,dt + 4\,t\,dW(t), \text{ com } Z(0) = 5.$$

a) Escreva a equação dada na forma integral.
b) Deduza a respectiva solução.

Exercício 1.17 *O modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) para o processo de taxa de juro $R(t)$ é*

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\,dt + \sigma\sqrt{R(t)}\,dW(t),$$

onde α, β e σ são constantes positivas. A equação CIR não tem solução fechada. Contudo, podem determinar-se o valor médio e a variância de $R(t)$.

a) Calcule o valor médio de $R(t)$. (Sugestão: Seja $X(t) = e^{\beta t}R(t)$. Use a função $f(t,x) = e^{\beta t}x$, aplique a fórmula de Itô na forma diferencial, integre e aplique o operador esperança).

b) Calcule a variância de $R(t)$. (Sugestão: Calcule $d\left(X^2(t)\right)$ aplicando a fórmula de Itô na forma diferencial, integre e aplique o operador esperança).

c) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} Var(R(t))$.

Exercício 1.18 *Prove que no esquema de Millstein, temos*

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)\,ds = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\sigma\left(X\left(t_{i-1}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(b\sigma' + \frac{1}{2}\sigma''\sigma^2\right)(X_r)\,dr + \int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma\sigma')(X_r)\,dB_r\right] dB_s.$$

Exercício 1.19 *Calcule as probabilidades de transição do processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média.*

Solução: A EDE é

$$dX_t = a(m - X_t)\,dt + \sigma dB_t.$$

A solução em $[s, +\infty)$, com condição inicial $X_s = x$, é

$$X_t^{s,x} = m + (x - m)\,e^{-a(t-s)} + \sigma e^{-at}\int_s^t e^{ar}dB_r.$$

Então, como $\left\{\int_s^t e^{ar} dB_r, t \geq s\right\}$ é um processo Gaussiano com média e variância (ver exemplo em aula anterior), temos que

$$E\left[X_t^{s,x}\right] = m + (x - m)\, e^{-a(t-s)},$$
$$\operatorname{Var}\left[X_t^{s,x}\right] = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right).$$

A probabilidade de transição é

$$P(\cdot, t, x, s) = \text{Distribuição de } X_t^{s,x}.$$

Exercício 1.20 *Deduza a fórmula de Black-Scholes para uma opção de venda europeia (ou opção "put"com payoff $\Phi(S_T) = \max(K - S_T, 0)$).*

Exercício 1.21 *Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade onde está definido um movimento Browniano B_t, $t \geq 0$, com uma filtração $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$.*

a) Prove que o movimento Browniano é uma martingala.

b) Prove que a variação quadrática do movimento Browniano no intervalo $[0, T]$ é T.

c) Prove que $\int_0^T B_t\, dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T$ (sendo considerado o integral de Itô).

d) Comente a alínea anterior relacionando-a com afirmação paralela no cálculo clássico.

e) Prove que $\int_0^t s^2\, dB_s = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s\, ds$. (Sug: Considere $Y_t = t^2 B_t$ e use o Lema de Itô.

h) Calcule $\mathbb{P}\left[B_{2.9} > 1.8\right]$.

Exercício 1.22 *Considere o movimento Browniano B_t, $t \geq 0$, com a filtração $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, associada, e sejam $\alpha(t)$ e $\sigma(t)$ processos adaptados. Considere o processo de Itô*

$$X(t) = \int_0^t \sigma(s)\, dB_s + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds.$$

a) Escreva $X(t)$ na forma diferencial.

b) Calcule $dX(t)\, dX(t)$.

c) Determine a dinâmica do processo (asset pricing) dado por

$$S(t) = S(0)e^{X(t)}.$$

d) Mostre que se $\alpha = 0$ então $S(t)$ é uma martingala.

Exercício 1.23 *Seja B_t, $t \geq 0$, um movimento Browniano e considere o modelo de Vasicek para o processo de taxa de juro $r(t)$*

$$dr(t) = c(\mu - r\,(t))\,dt + \sigma\,dB_t,$$

onde c, μ e σ são constantes positivas.

a) Escreva o processo $r(t)$ na forma integral.

b) Determine $r(t)$ resolvendo a EDE dada (Sugestão: considere $f(t,x) = e^{ct}x$ e aplique a fórmula de Itô).

c) Calcule o valor médio e a variância de $r(t)$.

Exercício 1.24 *Sejam B_t, $t \geq 0$, um movimento Browniano e c e σ constantes positivas. Considere as seguintes equações diferenciais estocásticas:*

$$dX(t) = c\,X(t)\,dt + \sigma\,X(t)\,dB_t.$$
$$dY(t) = c\,Y(t)\,dt + \sigma\,dB_t.$$

a) Escreva as equações dadas na forma integral.

b) Deduza as respectivas soluções.

Exercício 1.25 *O modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) para o processo de taxa de juro $R(t)$ é*

$$dR(t) = (\alpha - \beta R\,(t))\,dt + \sigma\sqrt{R\,(t)}\,dB_t,$$

onde α, β e σ são constantes positivas. A equação CIR não tem solução fechada. Contudo, podemos determinar-se o valor médio e a variância de $R\,(t)$.

a) Calcule o valor médio de $R(t)$. (Sugestão: Seja $X(t) = e^{\beta t}R(t)$. Use a função $f(t,x) = e^{\beta t}x$, aplique a fórmula de Itô na forma diferencial, integre e aplique o operador esperança).

b) Calcule a variância de $R(t)$. (Sugestão: Calcule $d\left(X^2(t)\right)$ aplicando a fórmula de Itô na forma diferencial, integre e aplique o operador esperança).

c) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} Var\left(R(t)\right)$.

Consideremos o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco S_t e um activo sem risco (exemplo conta bancária) B_t. Os activos S_t e B_t têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's

$$dS_t = \mu\,S_t\,dt + \sigma\,S_t\,dW_t \quad \text{e} \quad dB_t = r\,B_t\,dt, \text{ com } B_0 = 1.$$

Seja $\Phi = (a_t, b_t)$ uma carteira autofinanciada, cujo valor V_t é dado por $V_t = a_tS_t + b_tB_t$, com dinâmica

$$dV_t = a_t dS_t + b_t dB_t,$$

e que permite replicar a opção europeia de compra $C(S_t, t)$*, isto é,* $V_t = C(S_t, t)$*. Mostre que:*

a) usando a fórmula de Itô,

$$dC(S_t,t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t) + \frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)S_t\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)\sigma S_t dW_t.$$

b) sendo a carteira auto-financiada e permitindo replicar $C(S_t, t)$*, obtém-se*

$$dC(S_t,t) = (b_t r B_t + a_t S_t \mu)dt + a_t S_t \sigma dW_t.$$

c) tomando $a_t = \frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t)$ *e* $b_t = \frac{C(S_t,t) - S_t \frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)}{B_t}$*, então* $C(S_t, t)$ *é solução da EDP de Black-Scholes*

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t) + \frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)S_t r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2 = rC(S_t,t).$$

Capítulo 2

Problemas de exame - A

Exercício 2.1 *Considere um movimento Browniano* $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$*. Mostre que o processo* Y *definido por* $Y_t = \exp(t/2)\sin(B_t)$ *é uma martingala relativamente à filtração gerada pelo movimento Browniano.*

Exercício 2.2 *Seja* $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ *um movimento Browniano.*

(a) Determine explicitamente o processo $u = \{u_t, t \in [0, T]\}$ *tal que*

$$B_T^3 = \int_0^T u_s dB_s.$$

(Sugestão: vai necessitar de calcular $\int_0^T B_t dt$*. Pode usar a fórmula de Itô para mostrar que* $\int_0^T B_t dt = \int_0^T (T - t) dB_t$*)*

(b) Considere um processo estocástico X *que satisfaz a EDE*

$$X_t = 1 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s,$$

onde μ *e* σ *são constantes. Considere ainda o processo* Y *definido por* $Y_t = X_t^\beta$*, com* $\beta \geq 2$*. Determine a equação diferencial estocástica satisfeita pelo processo* Y*.*

Exercício 2.3 *Sejam* a *e* b *constantes positivas e considere a EDE*

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{b - Y_t}{T - t} dt + dB_t, \quad 0 \leq t < T, \\ Y_0 &= a. \end{aligned}$$

(a) Verifique que

$$Y_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T - t)\int_0^t \frac{dB_s}{T - s}, \qquad 0 \leq t < T$$

é solução da EDE.

(b) Determine o valor esperado e a variância de Y_t com $0 \leq t < T$.

Exercício 2.4 *Considere a EDE*

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + c(t)\, X_t dB_t,$$
$$X_0 = 1.$$

(a) Quais as condições que a função f deve satisfazer para garantir a existência e unicidade de solução para a EDE? Justifique e dê um exemplo de uma função f dependente de t e de x que satisfaça essas condições.

(b) Supondo que $f(t,x) = tx$ e que $c(t) = e^{-t}$, determine explicitamente o processo X que satisfaz a EDE. (Sugestão: pode considerar o factor integrante $F_t = \exp\left(\int_0^t c(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t [c(s)]^2\, ds\right)$ e supor que $X_t = F_t Y_t$, onde Y_t satisfaz a EDO $\frac{dY_t}{dt} = tY_t$).

Exercício 2.5 *Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco S_t e um activo sem risco (exemplo conta bancária) B_t. Os activos S_t e B_t têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's*

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t \quad \text{e} \quad dB_t = r\, B_t\, dt, \text{ com } B_0 = 1,$$

onde W é um movimento Browniano. Considere um direito contingente (derivado) da forma $\chi = \Phi(S_T) = \ln(S_T)$.

(a) Determine as equações diferenciais estocásticas satisfeitas pelos processos S_t e $Y_t := \ln(S_t)$, sob a medida Q (medida de martingala).

(b) Determine o preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente $\chi = \Phi(S_T) = \ln(S_T)$.

Exercício 2.6 *Seja F uma solução limitada e de classe $C^{1,2}$ da EDP*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) + \frac{x^2}{2}F(t,x),$$
$$F(0,x) = \varphi(x),$$

onde φ é uma função limitada. Prove que a solução pode ser representada por

$$F(t,x) = E_{0,x}\left[\varphi(B_t)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right)\right],$$

onde $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$ é um movimento Browniano com valor inicial em x (i.e., $B_0 = x$).

(Nota: Se não conseguir provar este resultado, pode usar uma fórmula de Feynman-Kac adequada a este problema para obter a representação estocástica para a solução).

Capítulo 3

Soluções A

1. i) Para cada t fixo, o processo Y_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável pois é uma função de t e de B_t, e B_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável.Logo Y_t é adaptado.

ii) $E\left[|Y_t|\right] \leq e^{\frac{t}{2}} E\left[|\sin(B_t)|\right] \leq e^{\frac{T}{2}} < \infty$

iii) Seja $Y_t = f(t, B_t)$ com $f(t,x) = e^{\frac{t}{2}} \sin(x)$. Esta função é de classe $C^{1,2}$. Então, pela fórmula de Itô, temos:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)\, dt + e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)\, dB_t - \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)\, dt \\ &= e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)\, dB_t. \end{aligned}$$

Logo, como $Y_0 = 0$, temos

$$Y_t = \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\, dB_s.$$

Como $e^{\frac{s}{2}} \cos(B_t) \in L^2_{a,T}$ pois o processo Y_t é adaptado e $E\left[\int_0^T \left(e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\right)^2 ds\right] \leq E\left[\int_0^T e^s \cos^2(B_s)\, ds\right] \leq Te^T < \infty$, o integral estocástico indefinido $Y_t = \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\, dB_s$.é uma martingala (propriedade essencial do integral estocástico indefefinido).

2. (a). Seja $Y_t = f(B_t) = B_t^3$. É claro que $f(x) = x^3$. Aplicando a fórmula de Itô (note-se que f é claramente de classe C^2), temos

$$dY_t = 3B_t^2 dB_t + 3B_t dt.$$

Portanto

$$Y_T = B_T^3 = 3\int_0^T B_t^2 dB_t + 3\int_0^T B_t dt.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $Z_t = tB_t$, ou seja, $Z_t = g(t, B_t)$ com $g(t, x) = tx$, temos:

$$dZ_t = B_t dt + t dB_t,$$

ou seja

$$Z_t - Z_0 = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$$

Como $Z_0 = 0$, temos

$$Z_T = TB_T = \int_0^T B_s ds + \int_0^T s dB_s$$

e

$$\int_0^T B_s ds = TB_T - \int_0^T s dB_s$$

Logo

$$\begin{aligned} B_T^3 &= 3\int_0^T B_t^2 dB_t + 3TB_T - 3\int_0^T t dB_t \\ &= \int_0^T 3B_t^2 dB_t + \int_0^T 3T dBt - \int_0^T 3t dB_t \\ &= \int_0^T 3(B_t^2 + T - t) dB_t. \end{aligned}$$

e portanto $u_t = 3(B_t^2 + T - t)$.

2 (b) $Y_t = f(X_t)$ com $f(x) = x^\beta$, que é claramente de classe C^2. Pela fórmula de Itô temos

$$\begin{aligned} dY_t &= \beta X_t^{\beta-1}(dX_t) + \beta(\beta-1) X_t^{\beta-2}(dX_t)^2 \\ &= \beta X_t^{\beta-1}(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) + \beta(\beta-1) X_t^{\beta-2}\sigma^2 X_t^2 dt \\ &= \left(\beta\mu + \beta(\beta-1)\sigma^2\right) Y_t dt + \beta\sigma Y_t dB_t. \end{aligned}$$

Pelo que a EDE é

$$dY_t = \left(\beta\mu + \beta(\beta-1)\sigma^2\right) Y_t dt + \beta\sigma Y_t dB_t.$$

3. (a) Podemos representar $Y_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T-t) X_t$, onde $X_t = \int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s$. Ou seja, $Y_t = f(t, X_t)$ com $f(t,x) = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T-t)x$.

É óbvio que f é de classe $C^{1,2}$ e pela fórmula de Itô, como $dX_t = \frac{1}{T-t}dB_t$, temos:

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(-\frac{a}{T} + \frac{b}{T} - X_t\right) dt + (T-t)\, dX_t \\ &= \frac{1}{T-t}\left(b - \left(a\left(1-\frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T-t)\, X_t\right)\right) dt + \frac{T-t}{T-t} dB_t \\ &= \frac{b - Y_t}{T-t} dt + dB_t. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{b-Y_t}{T-t} dt + dB_t, \\ Y_0 &= a. \end{aligned}$$

3 (b) Como $\frac{1}{T-s} \in L^2_{a,T}$, o integral estocástico $X_t = \int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s$ está bem definido e o seu valor esperado é zero. Logo

$$E\left[Y_t\right] = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T}.$$

E, pela isometria de Itô temos

$$\begin{aligned} Var\left[Y_t\right] &= E\left[Y_t^2\right] - \left(E\left[Y_t\right]\right)^2 \\ &= (T-t)^2\, E\left[\left(\int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s\right)^2\right] \\ &= (T-t)^2 \int_0^t \left(\frac{1}{T-s}\right)^2 ds \\ &= (T-t)^2 \left(\frac{1}{T-t} - \frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

4 (a) Se $f(t,x)$ for uma função contínua em x que satisfaz a condição de Lipschitz e a condição de crescimento linear, podemos aplicar o teorema de existência e unicidade e garantir que existe uma solução única para a EDE (isto poque a função $\sigma\,(t,x) = c(t)x$ satisfaz a condição de Lipschitz e é linear em x).

Condição de Lipschitz: Existe constante D tal que

$$\left|f\,(t,x) - f\,(t,y)\right| \leq D\left|x-y\right|,\ \forall x,y \in \mathbb{R},\ \forall t \in [0,T].$$

Condição de crescimento linear: Existe constante C tal que

$$|f(t,x)| \leq C(1+|x|), \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,T].$$

Exemplo de função que satisfaz estas condições:

$$f(t,x) = tx.$$

(b) Como $\frac{dY_t}{dt} = tY_t$ é uma EDO separável, a sua solução é

$$\frac{dY_t}{Y_t} = tdt \Longrightarrow \ln(Y_t) = \frac{t^2}{2} \Longrightarrow Y_t = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Logo

$$X_t = F_t Y_t = \exp\left(\int_0^t c(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t [c(s)]^2\,ds + \frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(Z_t - \frac{1}{2}\int_0^t [c(s)]^2\,ds + \frac{t^2}{2}\right),$$

onde $Z_t := \int_0^t c(s)\,dB_s$. Pelo que $X_t = g(t, Z_t)$ com $g(t,x) = \exp\left(x - \frac{1}{2}\int_0^t [c(s)]^2\,ds + \frac{t^2}{2}\right)$. Aplicando a fórmula de Itô a X_t e $g(t,x)$, podemos verificar que

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + c(t)\,X_t dB_t$$

e também $X_0 = 1$.

5 (a) A EDE $dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t$ é equivalente a

$$\begin{aligned} dS_t &= r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t\right) \\ &= r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, d\overline{W}_t, \end{aligned}$$

onde, pelo teorema de Girsanov, $\overline{W}_t := \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t$ é um movimento Browniano relativamente à medida de probabilidade neutra face ao risco (ou medida de martingala equivalente). Portanto a EDE ou a dinâmica de S_t sob a medida Q é

$$dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, d\overline{W}_t.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $X_t = \ln(S_t)$, temos:

$$dX_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma d\overline{W}_t$$

ou

$$X_t = \ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma \overline{W}_t.$$

5 (b) Pelo modelo de B-S, temos que

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}\left[\Phi(S_T)\right] \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}\left[\ln(S_T)\right] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} dS_u &= r\, S_u\, du + \sigma\, S_u\, d\overline{W}_u, \\ S_t &= s \end{aligned}$$

Pela alínea (a), temos

$$X_T = \ln(S_T) = \ln(s) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(\overline{W}_T - \overline{W}_t\right).$$

Logo

$$E^Q_{t,s}\left[\ln(S_T)\right] = \ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

e

$$F(t, S_t) = e^{-r(T-t)}\left[\ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right].$$

6. A ideia é fazer uma prova semelhante à da demonstraçao nos slides 8-10 da aula do Cap. 6 - parte 3.

Considerem-se o sprocessos

$$\begin{aligned} Y_t &= (s-t, B_t), \\ Z_t &= \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds. \end{aligned}$$

Aplique-se a fórmula de Itô à função $f(t, y, z) = e^z F(t, x)$. Obtemos

$$\begin{aligned} e^{Z_t} F(Y_t) = F(s, x) &+ \\ &+ \int_0^t \left[\left(AF - \frac{\partial F}{\partial t}\right)(s-r, B_r) + \frac{1}{2} B_r^2 F(s-r, B_r)\right] e^{Z_r} dr \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s-r, B_r)\, e^{Z_r} dB_r, \end{aligned}$$

onde A é o operador infinitesimal associado a B_t, isto é:

$$AF = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Portanto, como F satisfaz a EDP, temos:

$$\begin{aligned}
&\left(AF - \frac{\partial F}{\partial r}\right)(s-r, B_r^x) + \frac{1}{2}B_r^2 F(s-r, B_r) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s-r, B_r) - \frac{\partial F}{\partial t}(s-r, B_r) + \frac{1}{2}B_r^2 F(s-r, B_r) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e então:

$$e^{Z_t} F(Y_t) = F(s,x) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s-r, B_r)\, e^{Z_r} dB_r.$$

Aplicando o valor esperado e tomando $s = t$, obtemos

$$E_{0,x}\left[e^{Z_t} F(Y_t)\right] = F(t,x)$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
F(t,x) &= E_{0,x}\left[e^{Z_t} F(0, B_t)\right] \\
&= E_{0,x}\left[\varphi(B_t)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right)\right].
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Problemas de Exame - B

Exercício 4.1 *Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \geq 0\}$.*

(a) Seja Z o processo definido por

$$Z_t = B_t^4 - B_t^3 + 5B_t^2 - \alpha t - 3\int_0^t \left(2B_s^2 - B_s\right) ds,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante. Determine para que valores de α, é o processo Z_t uma martingala, justificando.

(b) Considere agora que, para além de B, temos outros 3 movimentos Brownianos $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ e $W^{(3)}$, que são todos independentes entre si e independentes de B. Será que o processo estocástico

$$Y_t = \frac{B_t + W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + W_t^{(3)}}{4}$$

é um movimento Browniano? Justifique.

Exercício 4.2 *Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$. Seja $Z_t = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\sin(B_t)$. Mostre que*

$$Z_t = \mathbb{E}[Z_t] + \int_0^t v_s dB_s,$$

para um certo processo v. Determine o processo v e $\mathbb{E}[Z_t]$.

Exercício 4.3 *Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$.*

(a) Seja $Z = \{Z_t, t \in [0,T]\}$ o processo estocástico definido por

$$Z_t = \left(1 + t + t^2\right) e^{3B_t}.$$

Defina $Y = \{Y_t, t \in [0,T]\}$ *como o processo com diferencial*

$$dY_t = \frac{dZ_t}{Z_t}$$
$$Y_0 = 2$$

Determine explicitamente Y*.*

(b) Considere a E.D.E.

$$dX_t = \left(\frac{X_t^3 - X_t^2 + X_t - 4}{1 + X_t^2}\right) dt + \frac{1}{2}\cos(X_t)\, dB_t$$
$$X_0 = 1.$$

Será que existe uma solução única para esta E.D.E. (com valor inicial) ou não? Justifique convenenientemente a sua resposta.

Exercício 4.4 *Considere o problema de valores na fronteira no domínio* $[0,T] \times \mathbb{R}$*:*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 7x\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{25}{2}\right) x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$
$$F(T, x) = x^4.$$

Especifique qual o gerador infinitesimal da difusão associada, determine explicitamente este processo de difusão, a fórmula de representação estocástica para a solução do problema e determine a solução do problema (da forma mais explícita que conseguir).

Exercício 4.5 *Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco* S_t *e um activo sem risco (por exemplo, conta bancária)* B_t*. Os activos* S_t *e* B_t *têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's*

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma\, S_t\, d\overline{W}_t \quad \text{e} \quad dB_t = r\, B_t\, dt,\ \text{com } B_0 = 1,$$

onde $\overline{W}$ *é um movimento Browniano.*

(a) Determine as equações diferenciais estocásticas satisfeitas pelos processos S_t *e* $Y_t := \ln\left(S_t^\beta\right)$*, com* $\beta \geq 2$*, sob a medida* Q *(medida de martingala).*

(b) Determine o preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente $\chi = \Phi(S_T) = \ln\left(S_T^\beta\right)$*, com* $\beta \geq 2$*.*

Exercício 4.6 *Seja $B = \{B_t, t \geq 0\}$ um movimento Browniano. Considere um processo $v = \{v_t, t \in [0,T]\}$ que pertence à classe $L^2_{a,T}$. Defina a sucessão de tempos de paragem*

$$\tau_n := \inf\left\{ t \geq 0 : \int_0^t v_s^2 ds \geq n \quad ou \quad \int_0^t v_s dB_s \geq n \right\}.$$

Mostre que

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq \tau_n \wedge T} \left| \int_0^t u_s dB_s \right|^4 \right] \leq CE\left[\left(\int_0^{\tau_n \wedge T} u_s^2 ds \right)^2 \right],$$

onde C é uma constante

Nota: use a desigualdade:

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq \tau_n \wedge T} \left| \int_0^t u_s dB_s \right|^4 \right] \leq KE\left[\left| \int_0^{\tau_n \wedge T} u_s dB_s \right|^4 \right],$$

onde K é uma constante.

Capítulo 5

Problemas de Exame - C

Exercício 5.1 *Considere o movimento Browniano* $B = \{B_t, t \geq 0\}$.

(a) Verifique se o processo X *definido por*

$$X_t = B_t^4 - 6tB_t^2 + t^2$$

é ou não uma martingala, justificando.

(b) Será que o processo Y *definido por*

$$Y_t = tB_{\frac{1}{t}}$$

é um movimento Browniano? Justifique convenientemente.

Exercício 5.2 *Seja* $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ *um movimento Browniano. Mostre que*

$$\exp(B_T) = e^{\frac{T}{2}} + e^{\frac{T}{2}} \int_0^T e^{\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} dB_s$$

e calcule $\operatorname{Var}\left[e^{\frac{T}{2}} \int_0^T e^{\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} dB_s\right]$. *(Sugestão: considere o processo* $Y_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$*).*

Exercício 5.3 *Considere o movimento Browniano* $B = \{B(t), t \in [0, T]\}$

(a) Resolva a E.D.E.

$$\begin{aligned} dX_t &= e^{-2t} X_t dt + t^2 X_t dB_t, \\ X_0 &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Sugestão: talvez seja conveniente usar um factor de integração adequado.

(b) Considere a E.D.E.

$$dX_t = \sqrt{X_t} dt + X_t dB_t, \qquad X(0) = 0.$$

Verifique se pode aplicar o teorema de existência e unicidade de soluções. Justifique.

Considerando também a E.D.E.

$$dX_t = X_t dt + \sqrt{X_t} dB_t, \qquad X(0) = 0,$$

o que pode concluir sobre a existência e unicidade de solução neste caso? Justifique.

Exercício 5.4 *Considere o problema de valores na fronteira no domínio* $[0,T] \times \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 4F(t,x) - 50\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad t > 0, \; x \in \mathbb{R} \\ F(T,x) &= x^2. \end{aligned}$$

Especifique qual o operador infinitesimal da difusão associada, determine explicitamente este processo de difusão e determine a solução explícita do problema.

Exercício 5.5 *Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco* S_t *e um activo sem risco (por exemplo, conta bancária)* B_t*. Os activos* S_t *e* B_t *têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's*

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma \, S_t \, d\overline{W}_t \quad e \quad dB_t = r \, B_t \, dt, \;\; com \; B_0 = 1,$$

onde $\overline{W}$ *é um movimento Browniano e* $t \in [0,T]$*.*

(a) Considere uma carteira autofinanciada com composição $(h^0(t), h^*(t))$ *(de activos sem risco e com risco, respectivamente) e seja* V_t *o valor dessa carteira no instante* t*. Supondo que esta carteira replica um derivado cujo preço é dado pela função de classe* $F(t,S_t)$ *(i.e.,* $F(t,S_t) = V_t$*) deduza que:*

$$h^*(t) = \frac{\partial F(t,S_t)}{\partial x}.$$

(Sugestão: aplique a Fórmula de Itô a $F(t,S_t)$ *e determine depois o diferencial* dV_t*, tendo em conta que a carteira é autofinanciada).*

(b) Determine o preço (no instante $t < T$*) do direito contingente com payoff*

$$\chi = \Phi(S_T) = \begin{cases} 2K & se \;\ln(S_T) > 2K \\ K & se \; K \leq \ln(S_T) \leq 2K \\ 0 & se \;\ln(S_T) < K \end{cases}$$

Exercício 5.6 *Seja $B = \{B_t, t \geq 0\}$ um movimento Browniano. Considere $\varepsilon > 0$ e a função*

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & se\ |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}\right) & se\ |x| < \varepsilon \end{cases}.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $g_\varepsilon(B_t)$ (apesar de não ter 2ª derivada em $x = \pm\varepsilon$), mostre que

$$g_\varepsilon(B_t) = \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^t g'_\varepsilon(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \mathbf{1}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(B_s)\, ds,$$

e mostre ainda que quando $\varepsilon \to 0$ (limite em média quadrática), obtemos que

$$\int_0^t g'_\varepsilon(B_s)\, dB_s \to \int_0^t \operatorname{sign}(B_s) dB_s.$$