



Instituto Superior de Economia e Gestão

Exercícios de Análise Matemática IV – MAEG

1. Equação diferencial de 1ª ordem

1.1 Mostre que $\log(t+1) - x(t) + \log(e^{x(t)} + 1) + C = 0$, com $C \in \mathfrak{R}$, é solução

(implícita) da EDO $x' = \frac{e^x + 1}{t+1}$, com $t > -1$.

1.2 Mostre que $x(t) = \frac{2t}{3-t^2}$ é solução do PVI $\begin{cases} x' = \frac{x}{t} + x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$.

1.3 Estude o comportamento de todas as soluções da equação $x' + ax = 0$, a constante, quando $t \rightarrow +\infty$. Contextualize, historicamente, o modelo de Malthus.

1.4 Obtenha a solução geral da EDO $x' = -\frac{x}{t} + 2$ com $t > 0$.

1.5 Obtenha a solução geral da EDO $x' - \frac{n}{t}x = e^t t^n$ com $n \in \mathfrak{R}$ e $t > 0$.

1.6 Resolva o PVI $\begin{cases} t^2 \frac{x'}{x} + 2t \log x = 0 \\ x(1) = e \end{cases}$.

1.7 Resolva as seguintes EDOs:

a) $x' + \frac{1+x^3}{tx^2(1+t^2)} = 0$

b) $x' = \frac{tx}{t^2 - x^2}$

c) $\frac{2t}{x^3} + \frac{x^2 - 3t^2}{x^4} x' = 0$

1.8 Encontre uma solução contínua do PVI $\begin{cases} x' = -x + g(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$, onde

$$g(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}.$$

1.9 Seja $x' = a(t)x + b(t)$ com a e b funções contínuas para $t \in \mathfrak{R}$, tais que $a(t) \leq -k < 0$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = 0$. Mostre que qualquer solução da equação tende para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

1.10 Obtenha a solução geral da equação $x' = ax - bx^2$, com $a, b > 0$.

1.11 Mostre que toda a EDO de variáveis separáveis é uma EDO total exacta.

1.12 Prove que a equação de variáveis separáveis $t dt + x dx = 0$ admite como solução, a equação de uma família de circunferências concêntricas na origem e de raio $\sqrt{2C}$.

1.13 Mostre que a equação $M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$, onde M e N são funções homogêneas do mesmo grau, é uma equação homogênea.

1.14 Encontre todas as funções $f(t)$ tal que a equação diferencial $x^2 \operatorname{sent} + xf'(t)x' = 0$ seja exacta. Resolva a equação para as expressões $f(t)$ encontradas.

1.15 A equação $e^t \sec x - t \operatorname{tg} x + x' = 0$ tem um factor integrante da forma $\mu(t, x) = e^{-at} \cos x$. Resolva a equação diferencial, para o valor da constante a encontrado.

1.16 Estude o comportamento de todas as soluções da equação $x' + t \operatorname{tg}(t)x = \operatorname{sent} \cdot \cos t$ quando $t \rightarrow \pi/2$.

1.17 Considere a equação diferencial $(x^2 - tx)dt + 2h(t, x)dx = 0$.

- Determine $h(t, x)$ sabendo que a equação admite como factor integrante a função $\mu(x) = x^{-1/2}$.
- Obtenha o integral geral da equação.

1.18 Resolva o PVI
$$\begin{cases} (3t^2x + x^3 + 2)dt + (3x^2t + t^3 + 5)dx = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$
.

1.19 Considere a equação $x' = \frac{at + bx + m}{ct + dx + n}$, onde a, b, c, d, m e n são constantes.

- Prove que se $ad - bc \neq 0$, a equação pode sempre reduzir-se a

$$x' = \frac{at + bx}{ct + dx}.$$

- Resolva a equação anterior no caso $ad = bc$.

- Resolva a equação $(t + 2x + 3)dt + (2t + 4x - 1)dx = 0$.

1.20 Considere a equação $(a(t)x + b(t))dt + dx = 0$, onde a e b são funções contínuas em \mathfrak{R} .

- Mostre que a equação é redutível a uma equação total exacta.
- Usando a alínea anterior, obtenha a solução geral para o caso $a(t) = b(t) = 2t$ e calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

1.21 Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

- $x' + tx = (tx)^3$
- $x' + 2tx = tx^2$
- $x - x' \cos t = x^2(1 - \sin t) \cos t$
- $(1 - t^2)x' - tx - stx^2 = 0$.

1.22 Dada a equação de Riccati $x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, mostre que se for conhecida uma solução particular, $\phi(t)$, a transformação $x = \phi(t) + \frac{1}{z(t)}$ reduz a equação dada a uma equação linear.

1.23 Resolva o PVI
$$\begin{cases} x'' = \frac{(x')^2}{x} \\ x'(0) = 1 \\ x(0) = -1 \end{cases} .$$

1.24 Resolva a equação $x'' = \frac{x'}{t} \left(1 + \log \frac{x'}{t} \right)$.

1.25 Considere o PVI
$$\begin{cases} x' = -ax + g(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} , \text{ com } a > 0 .$$

- Mostre que

$$x(t) = e^{-at} x_0 + e^{-at} \int_0^t e^{as} g(s, x(s)) ds$$

é solução do PVI.

b) Admita as seguintes hipóteses, e o seguinte lema:

$$\mathbf{H1)} \quad |g(t, x)| \leq b(t)|x|, \quad b(t) \geq 0$$

$$\mathbf{H2)} \quad \int_{t_0}^{+\infty} e^{at} b(t) dt < +\infty, \quad t_0 \in \mathfrak{R}$$

Lema Seja $c \geq 0$ e $z(t)$ e $v(s)$ funções não negativas. Se

$$z(t) \leq c + \int_0^t z(s)v(s)ds \quad \text{então} \quad z(t) \leq ce^{\int_0^t v(s)ds}.$$

Mostre que $|x(t)|$ tende para zero quando $t \rightarrow +\infty$.

1.26 Considere o PVI
$$\begin{cases} x' = 2tx + 4t \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

a) Resolva o PVI.

b) Utilize o método de Picard para obter a solução do PVI.

1.27 Considere o PVI
$$\begin{cases} x' = t^2 x + x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \text{em } R = \{(t, x) : |t| \leq 2, |x-1| \leq 2\}.$$

a) Utilize o método de Picard para obter as três primeiras aproximações da solução $x(t)$.

b) Mostre que $f(t, x) = t^2 x + x^2$ satisfaz a condição de Lipschitz em R e determine a constante de Lipschitz.

c) Obtenha a solução do PVI.

1.28 Seja $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função contínua e não identicamente nula. Mostre

que o PVI
$$\begin{cases} x' = g(t)\sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
 não tem solução única, e explique porque não está em

contradição com o teorema de existência e unicidade.

1.29 Mostre que o PVI $\begin{cases} x' = \sqrt{x^2 - 1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$ não tem solução única, e explique porque

não está em contradição com o teorema de existência e unicidade.

1.30 Considere o PVI $\begin{cases} x' = \theta x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$, com θ um parâmetro positivo. Para que valores

do parâmetro θ , existe uma solução única definida no intervalo $[0, T]$?

Indique a resposta, considerando separadamente:

- A solução do PVI.
- O teorema de existência e unicidade de solução.

1.31 Justifique que os seguintes PVI's têm uma solução única em \mathfrak{R} , e determine-a.

a) $\begin{cases} x' = \operatorname{arctg} x \\ x(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = e^{\cos t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \frac{e^x}{1 + e^x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

1.32 Considere a equação $x(t) = 1 + \int_0^t (t-s)x(s)ds$.

- Utilize o método de Picard para resolver a equação.
- Mostre que a equação dada representa um certo PVI.
- Mostre que a solução obtida na alínea a) satisfaz o PVI da alínea anterior.

2. Equação diferencial de ordem n

2.1 Dada a equação linear de 2ª ordem, $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ com $a(t)$ e $b(t)$ funções contínuas definidas num intervalo real, suponha que $x_1(t) \neq 0$ é uma solução dessa equação. Suponha também que se pretende encontrar uma nova solução da forma $x_1(t)u(t)$ com $u(t) \neq 0$. Prove que essa nova solução se obtém resolvendo uma equação linear de 1ª ordem homogénea.

2.2 Suponha que as raízes da equação quadrática $r^2 + ar + b = 0$ têm partes reais negativas. Prove que toda a solução da equação $x''+ax'+bx=0$ tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$.

2.3 Considere a equação $x''+ax'+bx=0$, $a, b \in \mathfrak{R}$.

- Prove que se a equação $r^2 + ar + b = 0$ tem raízes iguais, então $x_1(t) = e^{-\frac{at}{2}}$ é solução da equação diferencial dada.
- Encontre uma nova solução da equação diferencial, da forma $x_1(t)u(t)$. Mostre que $x_1(t)u(t)$ é solução da equação diferencial sse $u(t) = C_1t + C_2$ com $C_1, C_2 \in \mathfrak{R}$.

2.4 Resolva as seguintes equações:

- $x''-3x'+2x=0$ c.i. $(t, x, x') = (0, 1, -1)$
- $x'''-3x''+4x=0$ c.i. $(t, x, x') = (0, 1, -1)$
- $x''+2x'+x = \frac{e^{-t}}{t+1}$ com $t \neq -1$
- $x''+x'-2x = 8\text{sen}(2t)$
- $x''+4x = \cos(2t)$
- $x''+9x = (t^2 + 1)e^{3t}$
- $x''-6x'+9x = 2e^{3t} \cos(3t)$
- $x''-5x'+6x = (t^2 - 3)e^t$
- $x''+x = \sec(t)$.

2.5 Considere a equação diferencial $x^{(iv)} + 4x'''+5x''+4x'+4x=0$. Para que condições iniciais $x(0), x'(0), x''(0), x'''(0)$, existe uma solução $x(t)$ tal que:

- $x(t)$ é periódica
- $\lim x(t) = 0$ quando $t \rightarrow +\infty$
- $\lim |x(t)| = \infty$ quando $t \rightarrow +\infty$

d) $|x(t)|$ é limitada para $t \geq 0$.

2.6 Encontre todas soluções periódicas de $x^{(iv)} + 2x'' + x = 0$.

2.7 Considere a equação diferencial linear de 2º ordem $x'' - \frac{2}{t^2}x = 0$, $t > 0$.

a) Verifique que $\phi(t) = t^2$ é uma solução da equação dada.

b) Determine uma aplicação $w: (0, +\infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ de modo que ϕ e $w\phi$ constituam um sistema fundamental de soluções da equação dada.

c) Resolva o PVI $\begin{cases} x'' - \frac{2}{t^2}x = t \\ (t, x, x') = (1, 0, 1) \end{cases}$.

3. Sistemas de equações diferenciais

3.1 Mostre que $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental de soluções de

$x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e determine a solução do sistema.

3.2 Determine uma matriz fundamental de soluções do sistema de equações diferenciais lineares de 1ª ordem $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ e determine a sua solução.

3.3 Num determinado instante t as concentrações de dois produtos químicos x e y , em reacção, obedecem às seguintes igualdades:

i. $x'(t) = y(t) + t$

ii. $y'(t) = 6y(t) - 5x(t) + 6t - 1$

iii. $x(0) = 1, y(0) = y_0$

a) Escreva a equação diferencial linear de 2ª ordem que $x(t)$ verifica necessariamente.

b) Resolva o sistema de equações diferenciais dado pelas igualdades i. e ii. que verifica as condições iniciais expressas em iii.

c) Calcule o valor de y_0 para o qual $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 2 - y_0$.

3.4 Resolva o sistema linear não homogéneo $\begin{cases} x'_1 = -x_2 + t \\ x'_2 = x_1 \end{cases}$, sabendo que

$x^1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ e $x^2(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ são soluções linearmente independentes do sistema homogéneo associado.

3.5 Seja A uma matriz diagonal de ordem n . Que condições A deve verificar para que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, para todas as soluções de $x' = Ax$.

3.6 Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$. Determine valores para as constantes a, b, c tal

que a curva $t \mapsto (a \cos t, b \sin t, c e^{-t/2})$ seja solução de $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = (1, 0, 3) \end{cases}$.

3.7 Encontre duas matrizes diferentes A e B tais que a curva $x(t) = (e^t, 2e^{2t}, 4e^{2t})$ satisfaça ambas as equações diferenciais $x' = Ax$ e $x' = Bx$.

3.8 Encontre uma matriz quadrada de ordem 2, A , tal que uma solução de $x' = Ax$ seja $x(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + 2e^{-t})$.

3.9 Resolva os problemas de valores iniciais:

a) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3.10 Determine os vectores x^0 para os quais a solução do PVI,

$x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x$ e $x(0) = x^0$, é uma função periódica.

3.11 Resolva o PVI, $x' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3.12 Determine a solução do PVI $\begin{cases} x'''+x' = \sec t.tgt \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \end{cases}$, resolvendo o sistema de equações diferenciais equivalente à equação.

3.13 Pretende-se mostrar que $e^{A+Bt} = e^{At} e^{Bt}$ se $AB = BA$. Para o efeito, mostre sucessivamente:

a) $Y(t) = e^{A+Bt}$ satisfaz o PVI $\begin{cases} Y'(t) = (A+B)Y(t) \\ Y(0) = I \end{cases}$

b) $e^{At} B = B e^{At}$ se $AB = BA$, e nestas condições $Z(t) = e^{At} e^{Bt}$ é solução do PVI $\begin{cases} Z'(t) = (A+B)Z(t) \\ Z(0) = I \end{cases}$

c) Conclua que $Y(t) = Z(t)$.

3.14 Seja A uma matriz idempotente. Calcule e^{At} .

3.15 Seja $\Phi_1(t)$ uma matriz fundamental de soluções de $x' = Ax$. Mostre que $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$ é uma matriz fundamental de soluções sse $|C| \neq 0$.

3.16 Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 de traço nulo e determinante positivo.

a) Mostre que $A^2 = -|A|I$.

b) Mostre que $e^{At} = \frac{A}{\sqrt{|A|}} \operatorname{sen}(\sqrt{|A|}t) + \cos(\sqrt{|A|}t)I$. **Sugestão:** i. Usando a

definição de e^{At} , calcule A^3, A^4 , etc a partir da relação $A^2 = -|A|I$. ii.

Considere os desenvolvimentos em série, $\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$ e

$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \dots$

c) Usando a alínea anterior determine a solução do PVI $\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$.

3.17 Seja $\Phi_1(t)$ uma matriz fundamental de soluções de $x' = Ax$ e $\Phi_2(t)$ uma matriz fundamental de soluções de $x' = Bx$. Sabendo que $AB = BA$ obtenha

$$\text{a solução do PVI } \begin{cases} z'(t) = (A + B)z(t) \\ z(0) = z^0 \end{cases}.$$

3.18 Resolva os seguintes PVIs:

a) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3.19 Considere o PVI $\begin{cases} x' = Ax + b \\ x(0) = x^0 \end{cases}$ onde b é um vector de constantes $n \times 1$.

a) Mostre que a solução do PVI é $x(t) = e^{At}x^0 + (e^{At} - I)A^{-1}b$.

b) Use o resultado da alínea anterior no caso $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3.20 Resolva o PVI $\begin{cases} x' = Ax + g(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $g(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ e

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.21 Considere o sistema de equações diferenciais $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

a) Mostre que $x = y = 0$ é o único ponto de equilíbrio do sistema se $ad - bc \neq 0$.

b) Mostre que existe uma recta de pontos de equilíbrio para o sistema se $ad - bc = 0$.

3.22 Estude a estabilidade dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

$$\text{a) } x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x$$

$$\text{b) } x' = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\text{c) } x' = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -6 \\ 10 & -4 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\text{d) } x' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

$$\text{e) } x' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} x$$

3.23 Considere o sistema $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2x^3 \end{cases}$. Mostre que a solução de equilíbrio

$x = y = 0$ do sistema linearizado, é um ponto de sela.

3.24 Para que valores da constante α , é estável qualquer solução do sistema

$$\begin{cases} x' = -3x + \alpha y \\ y' = 2x + y \end{cases} ?$$

3.25 Estude a estabilidade das soluções das seguintes equações diferenciais:

$$\text{a) } x' = x + t \quad x(0) = 1$$

$$\text{b) } x' = 2t(x+1) \quad x(0) = 0$$

$$\text{c) } x' = -x + t^2 \quad x(1) = 1$$

$$\text{d) } x' = 2 + t \quad x(0) = 1$$

3.26 Estude a estabilidade das soluções $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$ da equação $x' = x(1-x)$.

3.27 Considere a equação diferencial $x' = x^2$. Mostre que todas as soluções $x(t)$ com $x(0) \geq 0$ são instáveis, enquanto que todas as soluções $x(t)$ com $x(0) < 0$ são assintoticamente estáveis.

3.28 Determine as soluções de equilíbrio de cada um dos seguintes sistemas de equações diferenciais e estude a estabilidade das mesmas:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 1 \\ y' = 2xy \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x' = \operatorname{tg}(x + y) \\ y' = x + x^3 \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} x' = -y \cos x \\ y' = -\operatorname{sen} x \end{cases} \end{aligned}$$

4. Equações com diferenças

4.1 Resolva os seguintes PVI:

$$\text{a)} \quad x(n+1) = -x(n) + 3 \quad x(0) = 0$$

$$\text{b)} \quad x(n+1) - 4x(n) = 2 \quad x(0) = 6$$

$$\text{c)} \quad x(n+2) + x(n+1) = 2x(n) \quad x(0) = 0 \quad x(1) = 3$$

4.2 Mostre que qualquer solução da equação $ax(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0$ verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$ se e só se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, onde λ_i são as raízes do polinómio de avanço.

4.3 Resolva as seguintes equações com diferenças:

$$\text{a)} \quad x(n+4) = -x(n) - 2x(n+2)$$

$$\text{b)} \quad x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = n$$

$$\text{c)} \quad x(n+2) + 5x(n+1) + 6x(n) = 3(-2)^n \quad x(0) = 6 \wedge x(1) = -13$$

$$\text{d)} \quad y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 5 + 2t$$

$$\text{e)} \quad y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = t$$

$$\text{f)} \quad \Delta y_t = 2^t + t^2$$

4.4 Usando a teoria das equações com diferenças, determine a soma das seguintes séries:

a) $\sum_{j=0}^{\infty} 3^j x^j \quad |x| < 1/3$

b) $\sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} \quad |x| < 1$

4.5 Considere o seguinte PVI,
 $x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) = 0 \quad x(0) = -1 \quad x(1) = 7$. Escreva em sistema o problema equivalente e resolva-o.

5. Integração de funções complexas

5.1 Calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$ onde γ é a circunferência de centro em a e raio r :

a) $f(z) = \frac{1}{z-a}, \quad a \in C$

b) $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}, \quad a \in C, n \in N$

5.2 Calcule $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ desde $z=0$ até $z=4+2i$ ao longo da curva definida por $\gamma(t) = t^2 + it$.

5.3 Calcule $\int_{\gamma} z^3 dz$ onde γ é a porção de elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ descrita no sentido directo entre $z=1$ e $z=i/2$.

5.4 Calcule $\int_{\gamma} (z^2 + 3z) dz$,

a) ao longo da circunferência $|z|=2$ de $z=2$ a $z=2i$

b) ao longo da linha recta de $z=2$ a $z=2i$

c) ao longo da poligonal de $z=2$ a $z=2+2i$ a $z=2i$.

5.5 Calcule $\int_{\gamma} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 dz$,

a) ao longo da circunferência $|z|=1$

b) ao longo da circunferência $|z-1|=1$

5.6 Prove que $\int_0^\pi e^{\cos\theta} \cos(\text{sen}\theta) d\theta = \pi$, considerando $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$.

5.7 Calcule $\int_\gamma \frac{e^z + z}{z-2} dz$,

- a) onde γ é o círculo unitário
 b) onde γ é o círculo centrado na origem de raio 3.

5.8 Calcule $\int_\gamma \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz$,

- a) onde γ é o círculo $|z-1|=4$
 b) onde γ é a elipse $|z-2|+|z+2|=6$

5.9 Calcule

- a) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 2z - 3} dz$
 b) $\int_{|z|=5} \frac{\text{sen}(3z)}{z + \pi/2} dz$

5.10 Mostre que $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz = \text{sent}$, com $t > 0$.

5.11 Estude quanto à convergência absoluta as seguintes séries de potências:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n (z-i)^n}{n!}$

5.12 Mostre que as seguintes séries definem funções holomorfas, respectivamente nos conjuntos $D(0,2)$ e no complementar de $\overline{D(1,e)}$, obtendo as suas expressões:

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{(z-1)^n}$

5.13 Desenvolva em série de Taylor as seguintes funções, em torno dos pontos indicados:

- a) e^z , $z_0 = 1$ b) $\frac{1}{z}$, $z_0 = 1$

5.14 Classifique as singularidades das seguintes funções:

a) $\frac{1}{\cos z}$

b) $\frac{\operatorname{sen} z}{z(z-1)}$

c) $\frac{1}{z \operatorname{sen}(\pi z)}$

d) $\operatorname{tg} z$

e) $\frac{z-1}{z^3-1}$

f) $\frac{z^3+i}{(z-1)(z^2+1)}$

g) $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$

5.15 Considere a função $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{z-1}\right)$. Classifique a singularidade $z=1$ e determine o desenvolvimento de Laurent da função nesse ponto.

5.16 Desenvolva a função $e^{\frac{z}{z-1}}$ em série de Laurent em torno do ponto $z=1$ e classifique esta singularidade.

5.17 Calcule o resíduo de $f(z) = \operatorname{tg} z$ em cada uma das suas singularidades.

5.18 Calcule os resíduos das funções seguintes nos pontos indicados:

a) $\frac{z^3}{(\operatorname{sen} z)^3}$ no ponto $z_0 = 0$

b) $\frac{1}{z \operatorname{sen} z}$ no ponto $z_0 = 0$

5.19 Calcule o valor dos seguintes integrais:

a) $\int_{|z|=\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)} dz$

b) $\int_{|z|=2} \frac{\cot gz}{z} dz$

c) $\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-i)^2 \operatorname{sen} z} dz$ onde γ é a curva definida parametricamente por $\gamma(t) = 1 + 2 \cos t + i \operatorname{sen} t$, com $t \in [0, 2\pi]$.

5.20 Calcule $\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-i)(z^2+9)} dz$ com $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta} + 2i$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

5.21 Seja $f(z) = \frac{e^z - e^{\frac{1}{z}}}{z}$. Estude a singularidade de f e determine o resíduo correspondente. Calcule $\int_{|z|=1} f(z) dz$.

5.22 Seja $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

a) Estude a função quanto à analiticidade e classifique a sua singularidade.

b) Calcule $\int_0^{2\pi} e^{4i\theta} e^{\cos\theta - isen\theta} d\theta$.