Revisão de conceitos em Probabilidade e Estatística

- Amostra e População
- Características numéricas: média e desvio padrão
- Experiência aleatória. Acontecimento
- Conceitos de probabilidades. Probabilidade condicionada
- Variáveis aleatórias discretas e contínuas. Valor esperado e variância
- Distribuições discretas: Binomial e Poisson
- Distribuições contínuas: Normal

Amostra e População

- **Objetivo: Tirar conclusões válidas sobre uma população com base numa amostra.**

Por razões económicas e logísticas só em casos excecionais, é analisada toda a população.

População: é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação. Este elementos podem ser indivíduos, firmas, cidades, etc..

Amostra: subconjunto da população (aleatoriedade)

Tipos de amostra

Amostragem com reposição: Considere-se uma população de 7 sacos de batata, cada um numerado de 1 a 7. Suponhamos que queremos uma amostra de 2 sacos

Cada saco tem uma probabilidade de 1/7 de ser escolhido. Suponhamos que escolhemos aleatoriamente o saco 7. Numa amostra com reposição temos que repor o saco. Em seguida escolhemos aleatoriamente o segundo saco. Note que o saco 7 pode voltar a ser escolhido.

Note que de cada vez a probabilidade de ser escolhido é 1/7.
E existem exatamente 49 diferentes amostras possíveis. Elas são: (1,1), (1,2), (1, 3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,1), (2,2), (2,3), etc.

Tipos de amostra

Amostragem sem reposição: Neste caso o saco 7 não é reposto e consequentemente quando escolhemos o segundo saco não podemos obter o saco 7. Contudo podemos obter os sacos 1,2,3,4,5,6
(temos 6 possibilidades cada uma com probabilidade 1/6)

Há 42 amostras possíveis. Elas são: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,1), (2,3), (2,4), etc.

Características numéricas: média e desvio padrão

Uma das perguntas frequentes feitas por investigadores, economistas, executivos, funcionários do governo e alguém que pretende analisar dados é se os dados são localizados em torno de um determinado valor.

A média aritmética (ou simplesmente média) de um conjunto de dados é a soma dos valores de dados dividida pelo número de observações.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Soma dos valores de n observações

Número de observações da amostra

Média aritmética

Exemplo: rendas de apartamentos

Setenta apartamentos foram selecionados aleatoriamente numa pequena cidade. As rendas mensais (em euros) são apresentadas no próximo slide.

Média aritmética

445	615	430	590	435	600	460	600	440	615
440	440	440	525	425	445	575	445	450	450
465	450	525	450	450	460	435	460	465	480
450	470	490	472	475	475	500	480	570	465
600	485	580	470	490	500	549	500	500	480
570	515	450	445	525	535	475	550	480	510
510	575	490	435	600	435	445	435	430	440

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{34356}{70} = 490{,}8$$

Medidas de dispersão

Muitas vezes é desejável considerar medidas de variabilidade (dispersão), bem como medidas de localização.

Por exemplo, na escolha do fornecedor A ou fornecedor B nós podemos estar interessados em saber não só o tempo médio de entrega para cada um, mas também a variabilidade no tempo de entrega para cada um.

Variância da amostra

A variância é uma medida de variabilidade que utiliza todos os dados.

É baseado na diferença entre o valor de cada observação (x_i) e a média.

Variância da amostra

A variância da amostra é a média das diferenças ao quadrado entre cada valor de dados e a média.

A formula da variância amostral é a seguinte:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

Desvio Padrão da amostra

O desvio padrão de uma amostra é a raiz quadrada da variância.

É medido nas mesmas unidades dos os dados, tornando-se mais facilmente interpretável do que a variância.

Desvio Padrão da amostra

O desvio padrão é calculado da seguinte forma:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Variância, desvio padrão e coeficiente de variação

Variância

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 2996{,}16$$

Desvio Padrão

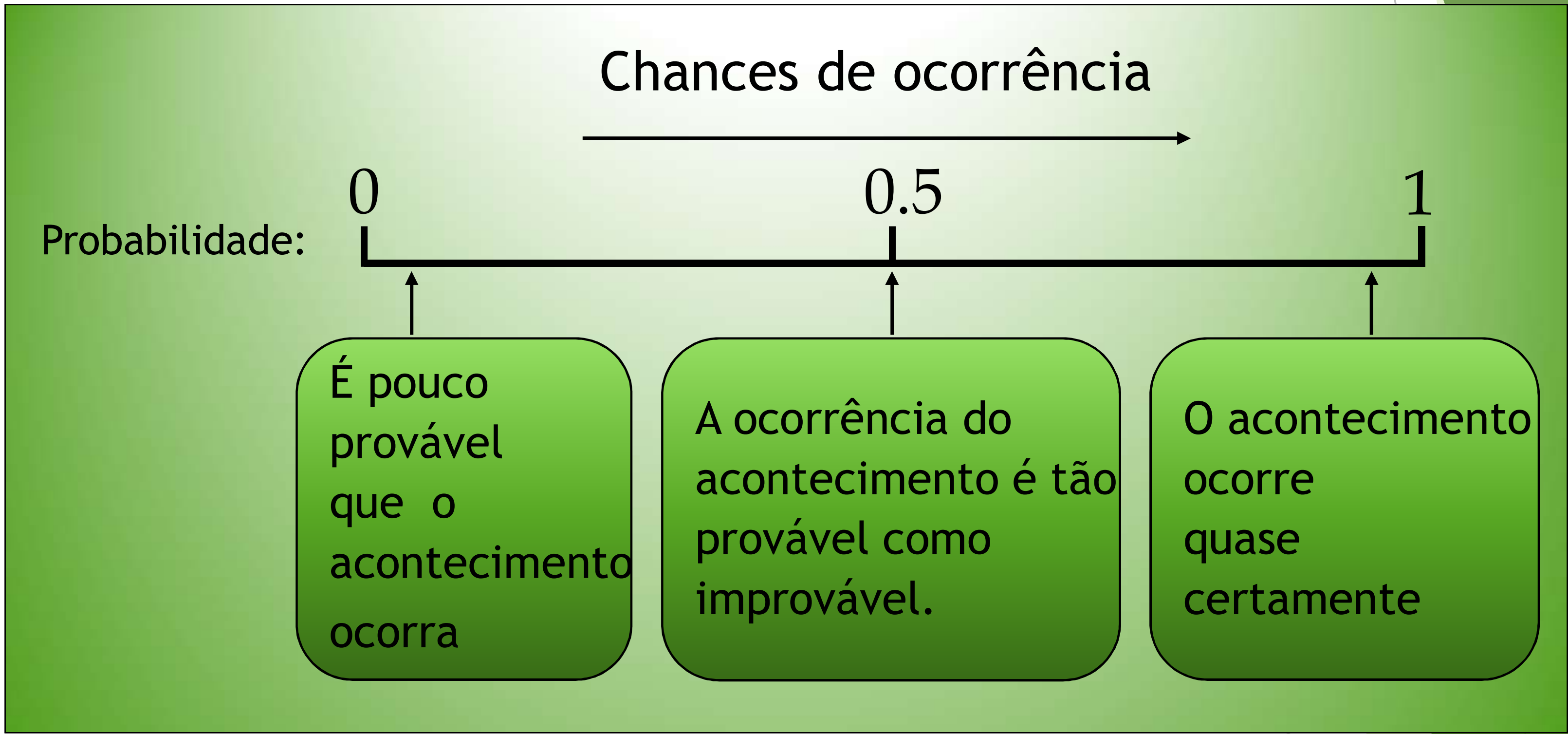
$$s = \sqrt{s^2} = 54{,}7$$

Os investigadores perceberam no século XVIII que a forma mais rigorosa de ter em conta incerteza nos seus estudos é recorrer ao conceito de probabilidade

Probabilidade é uma medida numérica que mede as chances de realização de um acontecimento.

A probabilidade pode ser usada como medidas do grau de incerteza de um acontecimento. Os valores de probabilidade um acontecimento são sempre numa escala de 0 a 1

Probabilidades



Uma experiencia e o espaço amostra

Uma experiência é qualquer processo que gera resultados bem definidos.

O espaço amostra de uma experiência é o conjunto de todos os resultados experimentais (S).

Um resultado de uma experiência também é chamado um ponto de amostra.

exemplos:

- Atirar uma moeda ao ar.
- Entrevistar várias pessoas da população votante de Portugal e perguntar-lhes como votariam se as eleições fossem hoje

Acontecimentos e suas probabilidades

Um acontecimento é uma coleção de pontos da amostra.

A probabilidade de qualquer acontecimento é igual à soma das probabilidades dos pontos de amostra que pertencem ao acontecimento.

Se pudermos identificar todos os pontos da amostra de uma experiência e atribuir uma probabilidade a cada um, podemos calcular a probabilidade de um acontecimento.

Conceito de probabilidade clássica

A forma mais antiga de definir probabilidades é o conceito clássico de probabilidade. Aplica-se quando todos os resultados possíveis são igualmente prováveis.

Podemos então dizer que se existem N possibilidades igualmente prováveis, de qual delas deve ocorrer e n são considerados como favoráveis, ou como um "sucesso", então a probabilidade de um "sucesso" é dado pela relação n/N

Exemplo: Qual é a probabilidade de tirar um ás de um baralho de 52 cartas?

Uma vez que existem n = 4 ases entre a N = 52 cartas, a probabilidade de desenho um ás é 4/52 = 1/13

Conceito frequencista de probabilidade

Um importante lacuna do conceito clássico de probabilidade é que existem muitas situações em que os possíveis resultados que surgem não podem todos considerados igualmente prováveis. Este seria o caso, por exemplo, se estamos preocupados com a questão se vai chover num dia.

Entre os diferentes conceitos de probabilidade existentes o mais popular é o conceito frequencista, que define probabilidade da seguinte forma: Considere-se a repetição de uma experiencia $\boldsymbol{n}$ vezes.

- Conte-se o número de vezes que o acontecimento $\boldsymbol{A}$ ocorreu nestas $\boldsymbol{n}$ repetições. O número n_A é frequência do acontecimento $\boldsymbol{A}$.
- O racio $\frac{n_A}{n}$ é chamado de frequencia relativa do acontecimento $\boldsymbol{A}$.
- A probabilidade do acontecimento $\boldsymbol{A}$ é o limite da frequência relativa do acontecimento $\boldsymbol{A}$ num número grande de repetições: $P(A) = \lim_{n\to\infty} n_A/n$.

Exemplo: Uma moeda é atirada ao ar 200 vezes. ´Contamos o número de vezes que ocorre “Coroa” .

A frequência relativa de ocorrência de Coroa para $\boldsymbol{n} = 1,2,\cdots,200$ é apresentada no seguinte gráfico

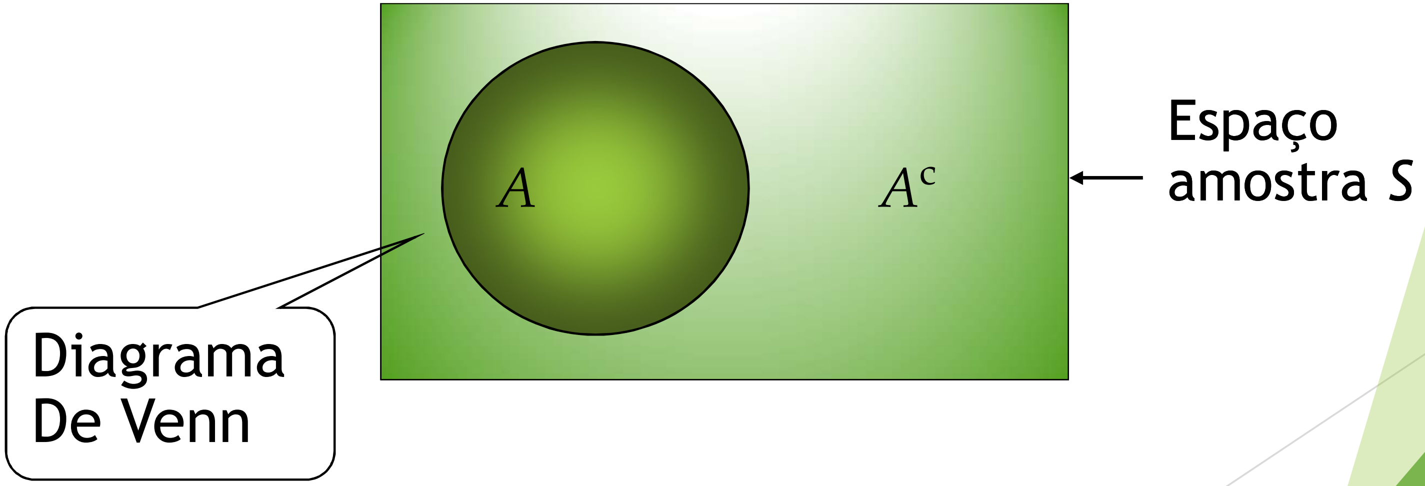
Algumas relações básicas entre probabilidades

Existem algumas relações entre probabilidades que podem ser usadas para calcular a probabilidade de um evento sem o conhecimento de todas as probabilidades de ponto de amostra.

- Complemento de um evento
- União de dois eventos
- Interseção de dois eventos
- Eventos mutuamente exclusivos

O complemento de um evento

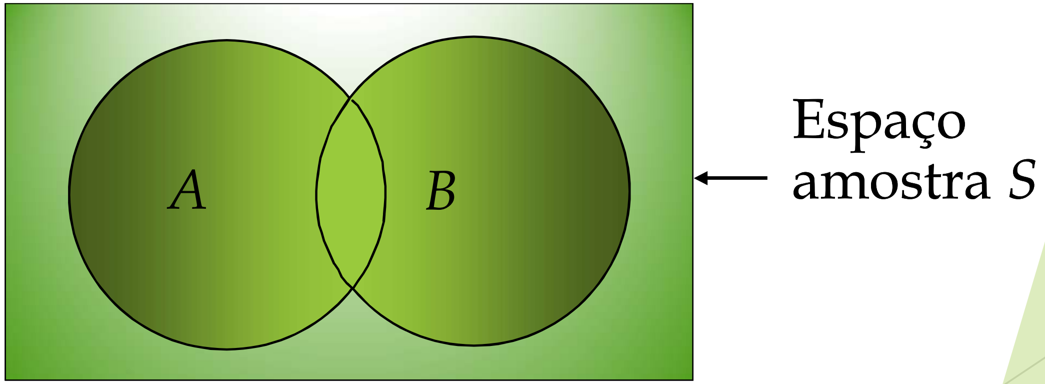
O complemento do evento A, denominado A^c ,
é definido como sendo o evento que consiste em de todos os pontos de amostra que não estão em A.



A União de dois acontecimentos

A União de dois acontecimentos A e B é o acontecimento que contém todos os pontos que pertencem a A ou B ou ambos.

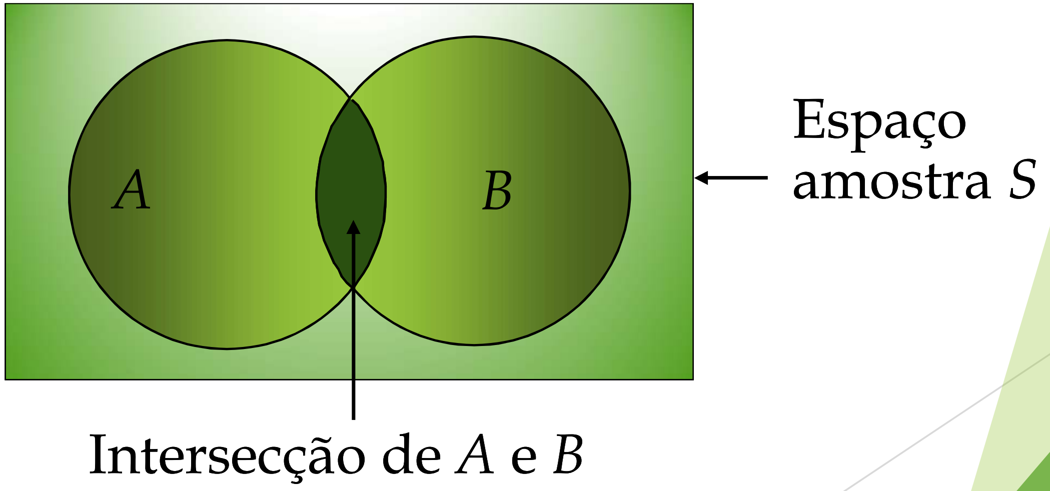
A união de acontecimentos *A* e *B* é definida como $A \cup B$.



Intercepção de dois acontecimentos

A interseção dos acontecimentos *A* e *B* é o conjuntos de todos of pontos que estão em *A* e *B*.

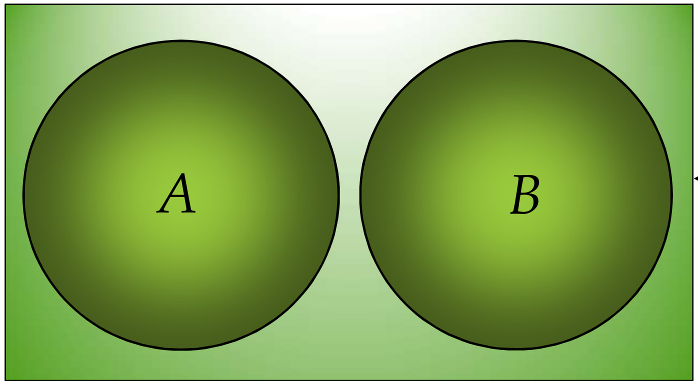
A intersecção de acontecimentos *A* e *B* é denominado $A \cap B$



Acontecimento mutuamente exclusivos

Dois acontecimentos são mutuamente exclusivos se os acontecimentos não têm pontos de amostra em comum.

Dois acontecimentos são mutuamente exclusivos, se, quando um acontecimento ocorre, o outro não pode ocorrer.



Espaço amostra S

Postulados da probabilidade de Kolmogorov.

Definição: probabilidade de um evento A, denominada P(A), satisfaz as seguintes condições:

P1 – $P(A) \geq 0.$

P2 – $P(\mathrm{S}) = 1.$

P3- se $A_1, A_2, \cdots, A_k$ *são acontecimentos mutuamente exclusivos* , então $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$.

A lei de adição

A lei de adição fornece uma maneira para calcular a probabilidade do evento A, ou B ou ambos A e B ocorrem.

A lei é a seguinte:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Acontecimento Mutuamente exclusivos

Se os acontecimentos *A* e *B* são mutuamente exclusivos, $P(A \cap B) = 0$.

Probabilidade Condicional

A probabilidade de um evento dado que ocorreu um outro evento é chamada uma probabilidade condicional.

A probabilidade de $\underline{A \text{ dado } B}$ é denominada $P(A \mid B)$.

A formula da probabilidade condicional é:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Lei da multiplicação

A lei da multiplicação fornece uma maneira para calcular a probabilidade da interseção de dois eventos.

A lei é a seguinte:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

Acontecimentos Independentes

Se a probabilidade de um acontecimento não é alterada pela existência de evento B, dizemos que os eventos A e B são independentes.

Dois acontecimentos A e B são independents se:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{ou} \quad P(B \mid A) = P(B)$$

Lei de multiplicação para acontecimentos independentes

Se dois acontecimentos A e B são independentes então:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Variável aleatória: é uma variável, *X*, cujo valor numérico é determinado pelo resultado de uma experiência.

Variáveis aleatórias discretas

- Variável aleatória discreta: é uma variável aleatória que pode assumir um conjunto discreto de valores.
- Exemplo: A distribuição de Bernoulli, é uma distribuição de probabilidade discreta, que assume valor 1 com probabilidade p e valor 0 com probabilidade q = 1-p.
- Então, se X é uma variável aleatória com esta distribuição, temos: $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q = p$.
- Por exemplo, se lançarmos uma moeda ao ar e definir X = 1 se “caras” e X = 0 se “coroas”, X é tem distribuição Bernoulli com p = 0.5.

Variáveis aleatórias discretas

- No exemplo X assume 2 valores possíveis {0,1} e as probabilidades associadas são {1/2,1/2}, respetivamente.
- Em geral, uma variável aleatória discreta assume k valores possíveis $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ com probabilidades associadas $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ respetivamente. · As probabilidades são definidas por $p_j = P(X = x_j)$, *j* = *1,2, …, k*, em que $0 \leq p_j \leq 1$e $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$.
- Outros exemplos: as distribuições Binomial e Poisson

Função de distribuição cumulativa

Definição - função de distribuição cumulativa de X é definida por,

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Variável aleatória Continua.

X é uma variável aleatória contínua se existe uma função $f(x) \geq 0$, *tal que*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad \forall\, x \in R$$

A função $f(x)$ chama-se função densidade de probabilidade

Valor esperado e variância

Observação: Para simplificar esses conceitos, eles vão ser introduzidos apenas para variáveis aleatórias discretas.

- **Valor esperado (ou média)**

  Se X é uma variável aleatória discreta, o valor esperado de X é

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{k} x_i . P(X = x_i)$$

- **Variancia da distribuição de X**, ou simplesmente variancia de X é dada por

$$Var(X) = V(X) = \sigma_X^2 = E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \mu_X\right)^2 . P(X = x_i)$$

Distribuição Binomial

A variável aleatória Binomial é definida como o número de sucessos em n tentativas, cada uma delas tem a probabilidade de sucesso θ.

Distribuição Binomial

Uma variável aleatória X tem uma distribuição Binomial e é referido como uma variável aleatória Binomial se e só se :

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x} \quad (x = 0,1,2,\cdots,n) \quad 0 < \theta < 1,$$

$\binom{n}{x}=\frac{n!}{(x!)(n-x)!}$. *Nós escrevemos,* $X \sim b(x; n, \theta)$

Se X tem distribuição binomial com parâmetros n e θ então $E(X) = n\theta$ e $Var(X) = n\theta(1 - \theta)$

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson foi proposto por Simeon Poisson (1781-1840) e é uma distribuição de probabilidade discreta importante para um número de aplicações, como as seguintes:

- Chamadas telefónicas por unidade de tempo;
- Acidentes por unidade de tempo;
- Chegada de clientes a um supermercado por unidade de tempo;
- Número de glóbulos sanguíneos visíveis ao microscópio por unidade de área;
-Número de partículas emitidas por uma fonte de material radioativo por unidade de tempo.

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória X tem uma distribuição de Poisson e é referido como uma variável aleatória de Poisson se e só se

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad (x = 0,1,2,\cdots) \quad \lambda > 0$$

onde λ é o número esperado de sucessos por unidade de tempo ou de espaço.

Nós escrevemos $X \sim p(x;\lambda)$.

A média e a variância da distribuição de Poisson são dadas por E(X)= $\boldsymbol{\lambda}$ e $Var(X) = \boldsymbol{\lambda}$

Distribuição Normal

Uma variável aleatória X tem distribuição Normal e, se e só se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

$$-\infty < x < +\infty; \quad -\infty < \mu < +\infty; \quad 0 < \sigma^2 < +\infty$$

e nós escrevemos $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

O valor esperado de X é μ e a variância é σ^2

Fig. Funções de densidade de probabilidade para a distribuição normal com médias diferentes mas a mesma variância $\sigma^2 = 1$

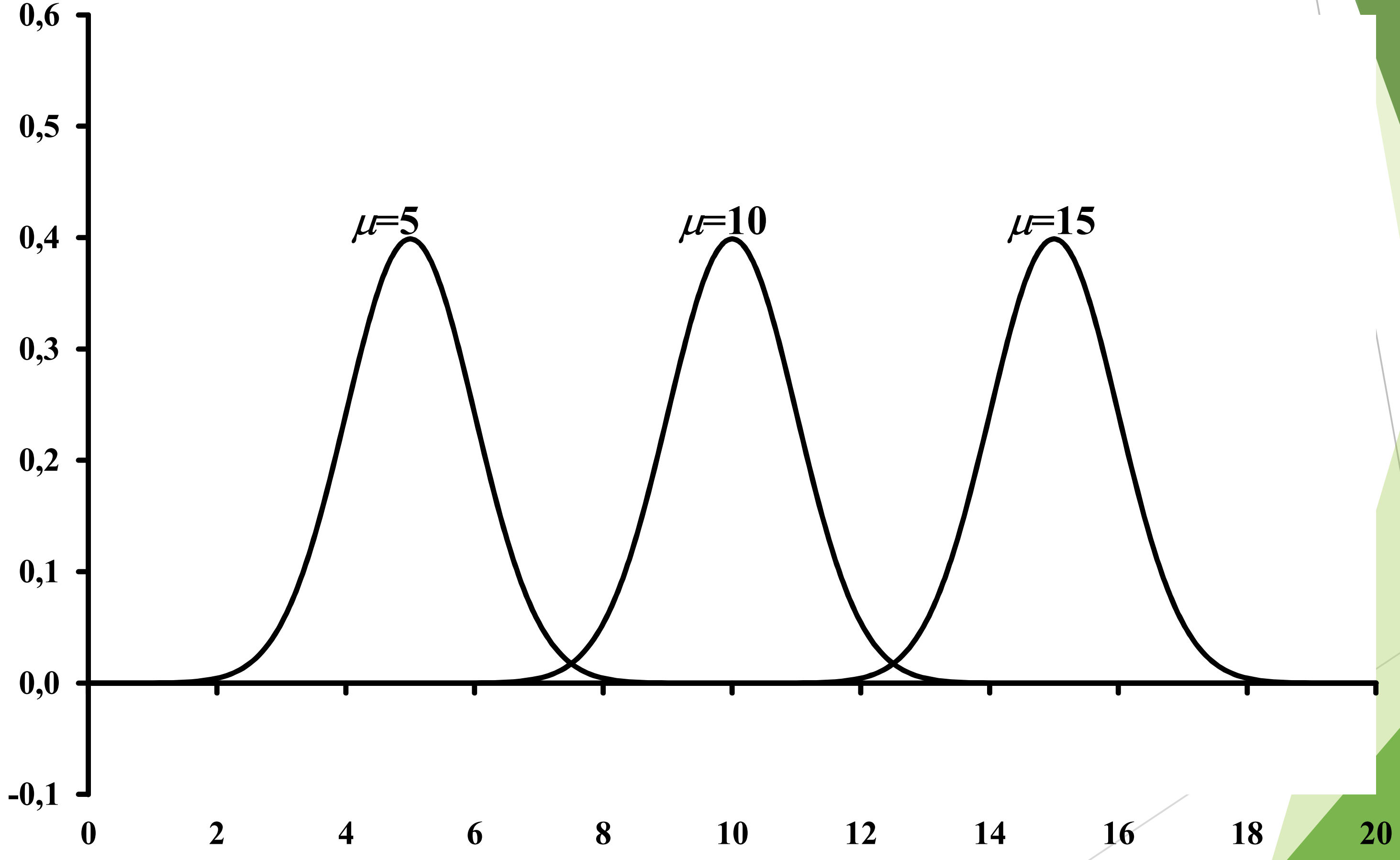
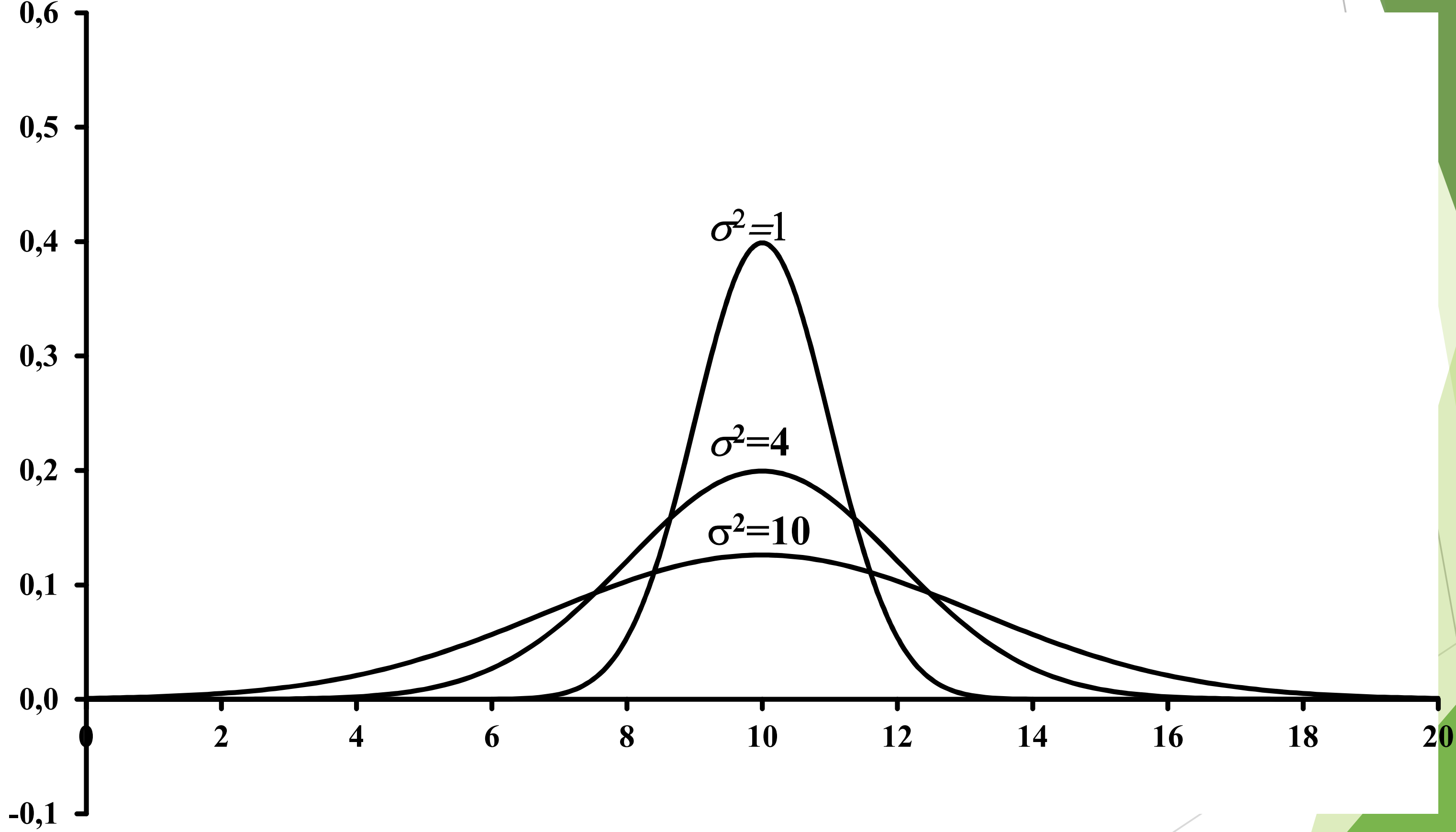


Fig. Funções de densidade de probabilidade para a distribuição normal com a mesma média $\mu = 10$ mas variâncias diferentes.



Distribuição Normal

distribuição normal estandardizada

A distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ is chama-se de distribuição normal estandardizada

Se X tem distribuição normal com média μ e desvio padrão σ, então

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Tem distribuição normal estandardizada.