ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha N^{o}2

1. Prove que a proposição

$$((A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow (C \subset A)$$

   é verdadeira, quaisquer que sejam os conjuntos A, B, C.

2. Prove as seguintes proposições

   (a) $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \emptyset)$;

   (b) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

   (c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

3. Dado um conjunto X, o conjunto das partes de X é

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}.$$

   (a) Prove que $(X \subset Y) \Rightarrow (\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y))$.

   (b) Prove que $\displaystyle\bigcap_{A \in \mathcal{P}(X)} A = \emptyset$.

   (c) Mostre que $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$.

   (d) Mostre que $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(X \cup Y)$ e prove que a inclusão recíproca, $\mathcal{P}(X \cup Y) \subset \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$, não é necessariamente verdadeira.

   (e) Prove as seguintes generalizações dos resultados anteriores

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{P}(X_i) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right), \qquad \bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(X_i) \subset \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right).$$

4. (a) Mostre que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j = \{x : \exists i \in \mathbb{N}, \forall j \geq i, x \in A_j\},$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j = \{x : \forall i \in \mathbb{N}, \exists j \geq i, x \in A_j\}.$$

(b) Mostre que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j \subset \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j.$$

Mostre que a inclusão recíproca,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$$

não é necessariamente verdadeira.

(c) Obtenha representações dos conjuntos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j\right)^c, \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right)^c$$

como intersecções e uniões de A_i^c, $i \in \mathbb{N}$.