

Cálculo e Instrumentos Financeiros

Capitalização; Regimes; Taxas

Licenciaturas em Economia, Finanças, Gestão

5.1 Taxas: TAEG, TAE, TANB

TAEG: Taxa Anual de Encargos Efectiva Global. **Empréstimos Consumo**

- Taxa incorpora todos os custos associados ao crédito ao consumo:
- Estes custos incluem juros e outras despesas a pagar pelo crédito.
- Expressão (Dec-lei 3259/91):

$$\sum_{k'=1}^{m'} \frac{A'_{k'}}{(1+t)^{y_{k'}}} = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(1+t)^{y_k}}$$

A_k : Montante de empréstimo k ; $A'_{k'}$: Reembolso ou pagamento de encargos k ; m : nº de empréstimo; m' —nº de reembolsos/encargos; y_k — anos do empréstimo k ; $y_{k'}$ —anos dos reembolsos/encargos k' ; t —TAEG.

- **TAE:** Expressão (Dec-lei 220/94):

$$\sum_{k'=1}^{m'} \frac{R_k}{(1+r)^{y_k}} = \sum_{q=1}^p \frac{D_q}{(1+r)^{y_q}}$$

m —n^o de recebimentos do cliente; R_k —recebimento k ;
 $y_{k'}$ —prazo (dias) do recebimento k ; p —n^o de pagamentos do cliente; D_q —valor do pagamento q ; $y_{q'}$ —prazo (dias) do pagamento q ; r —TAE.

TANB: Taxa Anual Nominal Bruta. **Aplicações Financeiras**

- Taxa que as instituições bancárias comunicam aos seus clientes;
- Trata-se de uma taxa anual e nominal, não considera o período efectivo da aplicação;
- É uma taxa bruta, não está expurgada de IRS (retido na fonte).

Exemplo (Ex.5.2)

Empréstimo ao consumo de 4500,00€, prazo 9 meses. Liquidação total na data de vencimento: capital em dívida, juros em Regime Simples à taxa anual de 9,2%. Encargos: admin. 45,00€, gestão 18,25€, despesas de reembolso 8,45€.

- Cálculo de C_n :

$$\begin{aligned}
 C_n &= C_0 + \text{Juros} + \text{Enc.Admin.} + \text{Enc.Gestão} + \text{Desp.Reembolso} \\
 &= 4500 + 4500 \times \frac{9}{12} \times 0,092 + 45 + 18,25 + 8,45 \\
 &= 4882,20\text{€}
 \end{aligned}$$

- **TAEG**, i_{TAEG} :

$$C_n = C_0 (1 + i_{TAEG})^n = 4500 (1 + i_{TAEG})^{9/12} \implies \text{TAEG} : 11,48\%$$

- **TAE**: Taxa Anual Efectiva. Taxa semelhante à TAEG, mas exclui imposto.

Desconto e Taxa de Desconto

- Por definição, o **juro** é calculado através de uma taxa com base no Capital inicial e referido no fim do período.
- No entanto, por vezes, há transações que exigem que a "remuneração" seja paga *à cabeça* :

Ex: O Sr. *Xis* pede emprestado **1000€** prometendo devolver no fim do ano. Acorda pagar **10% de juro "à cabeça"**, e devolver **1000€** no final.

- Recebe no início **900€** apenas, e paga **1000€** no fim do ano. A **taxa de juro** efectiva é

$$i = \frac{100}{900} = \frac{1000 - 900}{900} = \frac{1}{9} = 0.111(1); \text{ taxa } \mathbf{11.1\%} \text{ aprox.}$$

- **10%** é a **taxa de desconto** e $11,1(1)\%$ é a **taxa de juro**:

$$900(1 + 0.111(1)) = 1000\text{€}. \text{ Desconto} = 100\text{€}$$

Em termos gerais (taxa de juro e de desconto com o mesmo período de referência)

- **Taxa de desconto**, d :

$$d = \frac{\text{desconto}}{\text{v. final}} = \frac{C_1 - C_0}{C_1} \Leftrightarrow C_0 = C_1 (1 - d)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} C_0 &= C_1 (1 + i)^{-1} \\ \Rightarrow C_1 (1 - d) &= C_1 (1 + i)^{-1} \\ d &= \frac{1 + i}{i} \Leftrightarrow i = \frac{d}{1 - d} . \end{aligned}$$

- Outra relação:

$$d = \frac{C_1 - C_0}{C_1} \quad \text{e} \quad i = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$$

Desconto bancário. Desconto por Dentro e por Fora

- Associado ao **Regime de Juro Simples**, taxas proporcionais.

Desconto bancário. Desconto por Dentro e por Fora

- Associado ao **Regime de Juro Simples**, taxas proporcionais.
- Procedimentos aplicados em operações de curto prazo (e.g. letras comerciais, *com juro à cabeça*)

Desconto bancário. Desconto por Dentro e por Fora

- Associado ao **Regime de Juro Simples**, taxas proporcionais.
- Procedimentos aplicados em operações de curto prazo (e.g. letras comerciais, *com juro à cabeça*)
- A *remuneração* tem por base o capital final, verdadeiramente aplica-se uma **taxa de desconto**. Seja d .

Desconto bancário. Desconto por Dentro e por Fora

- Associado ao **Regime de Juro Simples**, taxas proporcionais.
- Procedimentos aplicados em operações de curto prazo (e.g. letras comerciais, *com juro à cabeça*)
- A *remuneração* tem por base o capital final, verdadeiramente aplica-se uma **taxa de desconto**. Seja d .
- **Desconto por dentro (D_d)** e **Desconto por fora (D_f)**:

- **Desconto por dentro (D_d) e Desconto por fora (D_f):**

$$D_d = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_d; \quad D_f = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_f.$$

- **Desconto por dentro (D_d) e Desconto por fora (D_f):**

$$D_d = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_d; \quad D_f = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_f.$$

- A remuneração é o **desconto**. Recebe emprestado C_0 e devolve C_1 :

$$D_d = \frac{C_1 \times d}{1 + d}; \quad D_f = C_1 \times d.$$

$$C_0 = C_1 - \frac{C_1 \times d}{1 + d} = C_1 \left(\frac{1}{1 + d} \right) \Leftrightarrow C_0(1 + d) = C_1$$

- **Desconto por dentro (D_d) e Desconto por fora (D_f):**

$$D_d = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_d; \quad D_f = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_f.$$

- A remuneração é o **desconto**. Recebe emprestado C_0 e devolve C_1 :

$$D_d = \frac{C_1 \times d}{1 + d}; \quad D_f = C_1 \times d.$$

$$C_0 = C_1 - \frac{C_1 \times d}{1 + d} = C_1 \left(\frac{1}{1 + d} \right) \Leftrightarrow C_0(1 + d) = C_1$$

- O D_d é a remuneração de C_1 actualizada. D_f não é actualizada.

- **Desconto por dentro (D_d) e Desconto por fora (D_f):**

$$D_d = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_d; \quad D_f = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_f.$$

- A remuneração é o **desconto**. Recebe emprestado C_0 e devolve C_1 :

$$D_d = \frac{C_1 \times d}{1 + d}; \quad D_f = C_1 \times d.$$

$$C_0 = C_1 - \frac{C_1 \times d}{1 + d} = C_1 \left(\frac{1}{1 + d} \right) \Leftrightarrow C_0(1 + d) = C_1$$

- O D_d é a remuneração de C_1 actualizada. D_f não é actualizada.
- $C_0(1 + d) = C_1$, ou seja d funciona como *taxa de capitalização i* .

- **Desconto por dentro (D_d) e Desconto por fora (D_f):**

$$D_d = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_d; \quad D_f = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_f.$$

- A remuneração é o **desconto**. Recebe emprestado C_0 e devolve C_1 :

$$D_d = \frac{C_1 \times d}{1 + d}; \quad D_f = C_1 \times d.$$

$$C_0 = C_1 - \frac{C_1 \times d}{1 + d} = C_1 \left(\frac{1}{1 + d} \right) \Leftrightarrow C_0(1 + d) = C_1$$

- O D_d é a remuneração de C_1 actualizada. D_f não é actualizada.
- $C_0(1 + d) = C_1$, ou seja d funciona como *taxa de capitalização i* .
- No D_d a tx. de desconto é igual à taxa de juro, $d = i$. No D_f : $i > d$.

Exemplo

Ex 1.5: O Sr. Henrique aceitou uma letra 20000 por conta de uma dívida que vence daqui a três meses. Descontou (D_d) a letra junto do Banco a uma taxa de 15% ao trimestre, juros à cabeça. Na data de vencimento a dívida vale $C_1 = 20000$, mas o banco só creditou $C_0 = 17391.3\text{€}$, descontou $D_d = 20000 - 17391.3 = 2608.7$ no momento 0:

$$(1 + i)C_0 = C_1 \Leftrightarrow C_0 = 20000/1.15 = 17391.3$$

$$D_d = 20000 - 17391.3 = 2608.7 \rightarrow 17391 \times 1.15 = 20000$$

No Desconto por dentro, $d = i$. Em Desconto por fora:

$$D_f = 20000 \times 0.15 = 3000 \Rightarrow C_0 = 20000 - 3000 = 17000$$

$$20000 = 17000(1 + i) \Leftrightarrow i = 0,17647 \Rightarrow 17,65\%$$

A taxa de juro é 17,65% e 15% é a taxa de desconto.

Desconto de Letras

Quatro modalidades de **vencimento**:

- 1 **À vista** – a letra é pagável no momento da sua apresentação a pagamento;
- 2 **A um certo termo de vista** – a letra é pagável num determinado prazo a contar da data do aceite;
- 3 **A um certo termo de data** – a letra é pagável num determinado prazo a contar da data do saque (ordem de pagamento);
- 4 **Num dia fixado** – dia fixado entre o sacador e o sacado

Desconto de Letras: Endosso ao Banco

- Realização antecipada do capital (V. Actual)
- Banco recebe **Juros+Comissão** (antecipação e serviço)
- O sacado paga ao Banco no prazo estipulado.

Ex. 5.5: Aceite de letra, VN: 8500,00€. Quando faltavam 144 dias para o vencimento, faz o desconto no Banco. Encargos: Tx. Juro: 6,9%; CC: 0,8%; IS: 4,0%; Portes: 1,50 €.

a) Desconto Bancário (DB)

Juros (J): Desconto por Fora s/ o V.n. Prazo: base, ano civil (365 d) + 2 dias (legal):

$$J = Vn. \frac{n + 2}{365} \cdot i_A = 8500 \cdot \frac{146}{365} \cdot 0,069 = 234,60€$$

Comissão de Cobrança (CC): taxa de comissão (txCC) s/ o Vn.

$$CC = Vn. TxCC = 8500 \times 0,008 = 68,00€$$

Imposto de Selo (Is): taxa (txis) sobre as receitas banco:

$$Is = txis \cdot (J + CC) = 0,04 \cdot (234,60 + 68,00) = 12,10€$$

OE (portes e outros): OE = 1,50€. Desconto Bancário:

$$DB = J + CC + Is + OE = 316,20€$$

Ex. 5.5: b) O Produto Líquido de Desconto:

$PLD = V_n - DB = 8500 - 316,20 = 8.183,80\text{€}$. Valor nominal de 8500,00 euros, o Sr. Cebola receberia antecipadamente 8183,80€.

As taxas TAE, TAEG e Real, permitem quantificar os diferentes custos da operação bancária de desconto de letras:

A) **Taxa Real** i_{REAL} , em Regime Simples

$$V_n = PLD \left(1 + \frac{n+2}{365} \cdot i_{REAL}\right) \Leftrightarrow 8500 = 8183,80 \left(1 + \frac{146}{365} \cdot i\right)$$

$$\Rightarrow i_{REAL} \rightarrow 9,659\%$$

B) **TAEG**, Regime composto

$$V_n = PLD(1 + i_{TAEG})^{\frac{n+2}{365}} \Leftrightarrow 8500,00 = 8183,80(1 + i_{TAEG})^{\frac{146}{365}}$$

$$i_{TAEG} \rightarrow 9,941\%$$

C) **TAE**, *retira-se* o IS: $PLD' = 8183,80 + 12,10 = 8195,90\text{€}$

$$V_n = PLD' \cdot (1 + i_{TAE})^n \Rightarrow i_{TAE} \rightarrow 9,536\%$$

Reforma de Letras

- Substituição de uma letra por outra(s) c/ vencimento posterior, valor igual ou inferior (reforma total ou parcial) ou mesmo de valor superior (pode incluir os custos), com os mesmos intervenientes.
- Os custos da operação pagos de imediato ou são adicionados ao valor nominal da letra.

Ex. 5.7: Na data de vencimento de uma letra com $VN = 15.000\text{€}$ o sacado pediu ao sacador a reforma da letra, nas seguintes condições: 1- Amortização de 40% da dívida; 2. Novo saque a 90 dias; 3. Emissão: 0,4%; 4. tx J: 9,5%; 5. CC: 0,75%; 6. IS: 4,5%; 7. Portes: 1€.

Calcular o valor nominal da nova letra incluindo ou não o custo de emissão e as despesas de desconto.

Relação entre a **taxa efectiva anual**, i_A , e **taxa nominal anual** (convertível m vezes), $i_A^{(m)}$:

$$1 + i_A = \left(1 + \frac{i_A^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$i_A^{(m)} = m \left[(1 + i_A)^{1/m} - 1 \right]$$

$$i_A^{(m)} = \frac{\left[(1 + i_A)^{1/m} - 1 \right]}{\frac{1}{m}}$$

Calculemos o limite, $\lim_{m \rightarrow \infty} i_A^{(m)}$, directamente (indeterminação):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i_A^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\left[(1 + i_A)^{1/m} - 1 \right]}{\frac{1}{m}} = 0$$