

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha N°3

1. Considere uma família de conjuntos $\{A_i \subset \mathbb{R}, i \in I\}$.
 - (a) Prove que se todos os A_i forem fechados, então o conjunto $\bigcap_{i \in I} A_i$ é fechado.
 - (b) Apresente um exemplo em que todos os A_i são fechados mas $\bigcup_{i \in I} A_i$ não é fechado.
2. Para cada um dos seguintes conjuntos, determine o respectivo interior, exterior, fronteira e fecho.
 - (a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2n+1} < |x| < \frac{1}{2n}\right\}$;
 - (b) $[0, 1[\cup \{2\}$;
 - (c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x = n + \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$.
 - (d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \sin\left(x + \frac{1}{n}\right) \geq 0\right\}$.
3. Quando possível, dê um exemplo de um subconjunto de \mathbb{R} com as seguintes propriedades:
 - (a) Um conjunto finito, não vazio e aberto;
 - (b) Um conjunto fechado não limitado;
 - (c) Um conjunto igual à sua fronteira;
 - (d) Um conjunto finito mas não majorado;
 - (e) Um conjunto cujo exterior é um intervalo limitado.
4. Represente os seguintes conjuntos sobre a recta real:
 - (a) $\{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 2) \geq 0\}$;
 - (b) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(1 + x^2) > 0\}$;
 - (c) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \geq ||x| - 2|\}$;
 - (d) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x} < |x - 2|\right\}$;
5. para cada um dos seguintes conjuntos indique aqueles que são majorados, minorados ou limitados. Indique ainda (se existirem) o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada conjunto.

- (a) $[0, 2[\cup]3, 5[\cup \{6, 7\}$;
- (b) $\{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq x\}$;
- (c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$;
- (d) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \geq |x|\}$;
- (e) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \leq 5\}$;
- (f) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} > \frac{x}{x-2}\}$;
- (g) $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$;
- (h) $\{x = n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N}\}$;
- (i) $\{x = n^{(-1)^m} : n, m \in \mathbb{N}\}$;
- (j) $\{x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.