

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Exercícios suplementares

1. Determine quais entre as seguintes proposições são logicamente equivalentes.

(a) $(P \wedge Q) \vee ((\sim P) \wedge (\sim Q))$;

(b) $(\sim P) \vee Q$;

(c) $(P \vee (\sim Q)) \wedge ((\sim P) \vee Q)$;

(d) $\sim (P \vee Q)$;

(e) $(P \wedge Q) \vee (\sim Q)$.

2. Use as propriedades das operações lógicas para simplificar as seguintes proposições:

(a) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge (\sim Q))$;

(b) $(\sim ((\sim P) \wedge Q)) \vee ((\sim P) \wedge Q)$;

(c) $(\sim ((\sim P) \vee Q)) \vee (P \wedge (\sim R))$;

(d) $(\sim ((\sim P) \wedge Q)) \vee (P \wedge (\sim R))$;

(e) $(P \wedge Q) \vee ((\sim Q) \wedge (P \vee R))$.

3. Escreva expressões envolvendo apenas as operações \sim , \wedge e \vee que tenham as seguintes tabelas de verdade:

(a)

P	Q	?
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

(b)

P	Q	?
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. Indique o valor lógico das seguintes proposições:

(a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, (2x - y = 0)$;

(b) $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, (2x - y = 0)$;

(c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, (x - 2y = 0)$;

(d) $\forall x \in \mathbb{N}, (x < 10 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{N}, (y < x \Rightarrow y < 9))$;

- (e) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, (x + z = 100)$;
(f) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, (y > x \wedge \exists z \in \mathbb{N}, (y + z = 100))$.

5. Escreva proposições equivalentes às seguintes que não tenham nenhum símbolo \sim à esquerda de um quantificador.

- (a) $\sim (\forall a, \exists b, P(a) \Leftrightarrow Q(b))$
(b) $\forall y > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (ax^2 + bx + c = y)$.

6. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes

$$(a) \exists x, (P(x) \Rightarrow Q(x)), \quad (b) (\forall x P(x)) \Rightarrow (\exists x, Q(x)).$$

7. Determine uma fórmula para calcular cada um dos seguintes somatórios (prove que a fórmula é correcta).

- (a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1), \quad n \in \mathbb{N}$;
(b) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n + 1), \quad n \in \mathbb{N}$;
(c) $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n + 1)(n + 2), \quad n \in \mathbb{N}$;
(d) $1 \times 3^0 + 3 \times 3^1 + 5 \times 3^2 + 7 \times 3^3 + \dots + (2n + 1)3^n, \quad n \in \mathbb{N}$.