ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha Nº4

1. Indique quais das seguintes sucessões são majoradas, minoradas e limitadas:

   (a) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$;

   (b) $a_n = (-1)^n n^2$;

   (c) $a_n = n^{(-1)^n}$;

   (d) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;

   (e) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$;

   (f) $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -2a_n$;

   (g) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

2. Recorrendo directamente à definição de limite, prove que:

   (a) $\lim \frac{2n-1}{n+1} = 2$;

   (b) $\lim \frac{1}{n}\sqrt{n^2-1} = 1$;

   (c) $\lim \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)^2 = 1$.

3. Para cada uma das sucessões abaixo indicadas:

   (a) Estude a sucessão quanto à monotonia;

   (b) Calcule o seu limite, caso exista.

      i. $a_n = \frac{2n}{2n-1}$;

      ii. $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;

      iii. $a_n = \frac{2^{n+5}+3^{n-1}}{2^n+3^n}$;

      iv. $a_n = \frac{3^n-2^n}{2^{2n-1}+(-3)^n}$;

      v. $a_n = \frac{3^n+n}{2n}$;

      vi. $a_n = ne^{-n}$;

      vii. $a_n = \frac{n^2-\sqrt{n^2+1}+1}{n^2-1}$;

      viii. $a_n = \frac{c^n}{n!}$, em que c é uma constante positiva;

      ix. $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

4. Seja a_n, uma sucessão monótona e seja b_n, uma sucessão limitada. Prove que se estas sucessões verificarem

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b_n| < \frac{1}{n},$$

   então são ambas convergentes e têm o mesmo limite.

5. Seja a_n, uma sucessão que verifica

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Mostre que a sucessão é convergente e indique um intervalo de comprimento tão pequeno quanto possível que contenha os limites de todas as sucessões que verifiquem a condição acima.

   (b) Indique o supremo e o ínfimo do conjunto de termos de a_n. Esse conjunto terà máximo? E mínimo? Justifique.

6. Suponha que para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n designa um subconjunto limitado não vazio de $\mathbb{R}$ e que

$$A_n \subset A_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

   Seja s_n a sucessão definida por

$$s_n = \sup A_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Mostre que s_n é convergente se e só se existir um conjunto majorado $X \subset \mathbb{R}$ tal que

$$A_n \subset X, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (b) Dê exemplos de conjuntos A_n, $n \in \mathbb{N}$ limitados não vazios que verifiquem (1) e:

      i. Todos os conjuntos A_n sejam infinitos e a sucessão $s_n = \sup A_n$ seja convergente;

      ii. Todos os conjuntos A_n sejam finitos e a sucessão $s_n = \sup A_n$ seja divergente.

7. Sejam a_n, b_n, sucessões limitadas. Prove as seguintes relações:

   (a) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$;

   (b) $\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n + b_n) \leq \limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$;

   (c) Se a_n for convergente e b_n for limitada, então

$$\liminf(a_n+b_n) = \lim a_n + \liminf b_n, \qquad \limsup(a_n+b_n) = \lim a_n + \limsup b_n.$$

8. Indique, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras:

   (a) Se $\lim u_{2n} = a$ e $\lim u_{2n+1} = b$, então a e b são os únicos sublimites de u_n;

   (b) Se o conjunto de termos da sucessão não tem máximo nem mínimo, então a sucessão é divergente;

   (c) Se a_n for uma sucessão de termos positivos que verifique $\lim a_n = 0$, então a_n é decrescente;

   (d) Se as três sucessões a_{2n}, a_{2n+1} e a_{3n} têm limite, então a sucessão a_n tem limite.

9. Dê um exemplo de uma sucessão cujo conjunto de sublimites seja:

   (a) $\{3, 4\}$;
   (b) $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0\}$;
   (c) $\mathbb{Z}$;
   (d) $[0, 1]$;
   (e) $\mathbb{R}$.

10. Existe alguma sucessão cujo conjunto de sublimites seja $\mathbb{Q}$? Justifique.

11. Determine os limites das seguintes sucessões, caso existam:

   (a) $a_n = e^{\frac{n-1}{n+1}}$;
   (b) $a_n = \operatorname{cotg}\left(\pi + \frac{1}{n}\right) \operatorname{tg}\frac{1}{n}$;
   (c) $a_n = \ln(n^2 + 1) - \ln(n^2 - 1)$;
   (d) $a_n = \operatorname{arctg}\frac{1+n^2}{1-n^2}$;
   (e) $a_n = \cos\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)$;
   (f) $a_n = n^2 \operatorname{tg}\frac{1}{n}$;
   (g) $a_n = \ln(n^4 - n^3) - \ln(n^2 + 1)$;
   (h) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$;
   (i) $a_n = \sqrt[n]{n}$;
   (j) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 1}$;
   (k) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n$.