INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Normal – 4 de Junho de 2015

Duração: 2 horas

I

Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas absolutamente convergentes.

a) (2,0) Mostre que, para todo $x \in \Re$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n sen(nx))$ é convergente.

b) (1,0) Sendo a função $f : \Re \to \Re$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)),$$

mostre que f é periódica.

II

Seja $n \in N$, considere o subconjunto de $\Re^n$

$$A = \{x \in \Re^n : \|x\| = 1\}.$$

a) (1,5) Determine o interior, o exterior e a fronteira de *A*. Justifique se *A* pode ser um conjunto compacto.

b) (2,5) Seja $M \subset \Re^n$, e considere as funções $f : M \to A$ e $g : A \to \Re$, a primeira sobrejectiva e a última contínua. Prove que a função $g \circ f$ tem máximo e mínimo.

III

Considere a função $f:\Re^2 \to \Re$ definida pela expressão

$$f(x,y)=\begin{cases} xy+k & \text{se } x\neq 0 \\ 1 \ \text{se} & x=0 \end{cases}.$$

a) (1,5) Estude a existência da derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial u}(0,y)$, segundo um vector genérico não nulo $u\in\Re^2$, em função do valor real k.

b) (1,5) Faça $k=0$. O que pode afirmar sobre a diferenciabilidade de f nos pontos $(0,y)$, apenas com base no resultado obtido na alínea anterior?

c) (1,5) Faça $k=1$. Estude a diferenciabilidade de f nos pontos $(0,y)$.

IV

(2,5) Considere a função $f(x,y,z)=yze^x$ e seja $g:\Re^2 \to \Re^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0)=(0,1,2)$ e $D_g(0,0)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada direccional $D_v(f\circ g)(0,0)$ onde $v=(1,2)$, justificando convenientemente.

V

a) (1,5) Estude a existência de extremantes para a função $f(x,y)=\frac{x^2}{y}+2x+\log y$.

b) (2,0) Mostre, por definição, que $(-1,1)$ é um ponto de sela da função.

VI

(2,5) Considere a função complexa de variável complexa $f=u+iv$ com $v(x,y)=x^n+y^n$, e $n\in N$. Calcule os valores naturais de n, para os quais a função é holomorfa e determine-a. Calcule f' para os valores encontrados.

fim