INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II - Licenciatura MAEG

Época Normal – 7 de Junho de 2017 Duração: 2 horas

I

(2,5) Desenvolva em série de potências de $x-1$ a função $f(x)=e^{3x}$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Use o resultado obtido para calcular o valor de $f^{(iv)}(1)$, justificando convenientemente.

II

Considere a função $f:\Re^2 \to \Re$ definida por

$$f(x,y)=\frac{\log\left(1-|x-1|\right)}{\sqrt{-y}+\sqrt{1-(x-1)^2-(y+1)^2}}.$$

a) **(1,5)** Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.

b) **(1,5)** Considere os conjuntos da forma $A_k=\left\{(x,y)\in\Re^2 : \|(x,y)\|=k\right\}$. Indique o valor lógico da proposição $\exists_{k\in\Re}\ A_k\cap fr\left(D_f\right)=\varnothing$, justificando convenientemente.

III

1. **(2,5)** Mostre que a função $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}(x-1)sen\left(\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)$, não estando definida em dois pontos, admite um prolongamento contínuo para um deles e para o outro não. Apresente o prolongamento contínuo que existe.

2. Considere a função $f(x,y)=\begin{cases} x+y & se\ \ xy=0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & se\ \ xy\neq 0 \end{cases}$.

a) **(1,0)** Mostre que $\left\|\nabla f(0,0)\right\|=\sqrt{2}$.

b) **(1,5)** Determine as direcções não nulas $v\in\Re^2$, para as quais existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, e indique este valor.

c) **(2,0)** Estude a diferenciabilidade de *f* no ponto $(0,0)$.

IV

(2,5) Seja $f:\Re^3\rightarrow\Re$, uma função diferenciável no ponto $(0,e,0)$ cuja matriz Jacobiana nesse ponto é $J_f(0,e,0)=\begin{bmatrix} e & -1 & e\end{bmatrix}$. Sendo $g(x,y)=f\left(sen\left(xy^2\right),e^y,\log\left(1+x^2\right)\right)\ \ \forall(x,y)\in\Re^2$, mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)+\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)=0\ .$$

V

Considere a função $f(x,y)=x^2-x^2y^2+3$.

a) **(1,0)** Mostre que a função admite uma recta de pontos críticos.

b) **(1,5)** Prove, por definição, que o ponto $(0,1)$ é um ponto de sela da função.

VI

(2,5) Demonstre a seguinte **regra de L'Hôpital**: Sejam *f* e *g*, duas funções complexas diferenciáveis numa vizinhança do ponto $z_0\in C$, tais que $f(z_0)=g(z_0)=0$ e $g'(z_0)\neq 0$. Então

$$\lim_{z\rightarrow z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\ .$$

Sugestão: Comece por observar, justificando, que se tem

$f(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\left(z-z_0\right)$, e uma expressão análoga para a função *g*.