INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

**ANÁLISE MATEMÁTICA II - ** Licenciatura MAEG

Época Normal – 3 de Junho de 2016   Duração: 2 horas

I

(2,5) Desenvolva em série de potências de $x+1$ a função $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

II

Considere a função $f:\Re^2\to\Re$ definida por

$$f(x,y)=\frac{\log\|(x,y)\|}{\sqrt{1-\|(x,y)\|}}.$$

a) (1,0) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.

b) (1,0) Determine analiticamente os conjuntos $\operatorname{int}(D_f)$ e $fr(D_f)$.

c) (1,5) Indique o valor lógico da proposição $\forall_{(x,y)\in D_f}\exists_{\varepsilon>0}\ B_\varepsilon((x,y))\subset D_f$, justificando convenientemente. Diga qual o seu significado.

III

Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases} xy & se\ \ y\neq x \\ x+y & se\ \ y=x \end{cases}.$$

a) **(1,0)** Determine o valor de $\nabla f(0,0)$.

b) **(1,5)** Mostre que a função admite derivada no ponto $(0,0)$ segundo qualquer direcção e indique esse valor.

c) **(2,0)** Estude a diferenciabilidade de *f* no ponto $(0,0)$.

IV

Atenda à seguinte

Definição: Uma função $f:\Re^n \to \Re$ diz-se *homogénea de grau* $\alpha \in Q$ se verifica a igualdade $f(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Considere a função $f: D_f \subset \Re^2 \to \Re$ definida por $f(x,y) = e^{x/y} - g\left(\frac{y-x}{x}\right)$ onde $g: D_g \subset \Re \to \Re$ é uma função de classe C^1.

a) (1,0) Mostre que a função *f* é homogénea e indique o seu grau de homogeneidade.

b) (1,5) Mostre que a função *f* verifica a seguinte igualdade conhecida por *identidade de Euler,*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f \ ,$$

sendo α o grau de homogeneidade de *f*.

c) (1,5) Supondo $g'(0) = 1$, mostre que a derivada de *f* no ponto *(1,1)* segundo qualquer direcção definida por $y = x$ é *0*.

V

(2,5) Considere a função $f(x,y,z) = x\cos(y) + e^{z^2}$. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

VI

Considere a função complexa de variável complexa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, holomorfa nalgum aberto de *C*.

a) (1,0) Para que valores do parâmetro real *a*, a função $u(x,y) = x^3 + y^3 + axy(x+y)$ é harmónica?

b) (2,0) Faça $a = -3$. Determine a função harmónica conjugada *v*, tal que $v(0,0) = 0$, e calcule $f'(-i)$.

fim