SOLUÇÕES

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Normal – 7 de Junho de 2017

I

$e^{3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^3 3^n}{n!}(x-1)^n$, $\forall x \in \Re$. Pelo Teorema de Taylor tem-se $a_n = \frac{e^3 3^n}{n!} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$, assim $f^{(iv)}(1) = e^3 3^4 = 81e^3$.

II

a) $D_f = \left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in \Re^2 : 1-|x-1| > 0 \wedge -y \geq 0 \wedge 1-(x-1)^2-(y+1)^2 \geq 0 \wedge \\ \sqrt{-y} + \sqrt{1-(x-1)^2-(y+1)^2} \neq 0 \end{array} \right\} =$

$= \{(x,y) \in \Re^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1\} \setminus \{(0,-1),(2,-1),(1,0)\}$

b) O conjunto A_k representa, para cada $k \geq 0$, a circunferência de centro em $(0,0)$ e raio k. Como $fr(D_f) = \{(x,y) \in \Re^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1\}$, basta que o valor de k seja inferior ao valor da menor distância entre $(0,0)$ e $fr(D_f)$. Assim, para $0 \leq k < \sqrt{2}-1$ fica provado que a proposição $\exists_{k \in \Re}\ A_k \cap fr(D_f) = \varnothing$ é verdadeira.

III

1. $D_f = R^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \frac{-m}{1+m^2} sen\left(\frac{1}{2}\right)$, o que prova não existir limite da função no ponto $(0,0)$ donde a função não é prolongável à origem por continuidade;

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=0$, pois é o produto de um infinitésimo por uma função limitada. Assim existe prolongamento contínuo da função ao ponto $(1,1)$ e este é definido por

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}(x-1)sen\left(\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0),(1,1)\\ 0 \quad \text{se } (x,y)=(1,1)\end{cases}$$

2. **a)** $\begin{array}{l} f_x'(0,0)\underset{def}{=}1 \\ f_y'(0,0)\underset{def}{=}1\end{array}$, assim $\|\nabla f(0,0)\|=\sqrt{2}$

b) Seja $v=(v_1,v_2)\underset{\sim}{\neq}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\begin{cases}\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2 & \text{se } \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2=0\\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}\sqrt{\mathrm{v}_1{}^2+\mathrm{v}_2{}^2} & \text{se } \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2\neq 0\end{cases}$

Só existe derivada direccional na origem segundo as direcções dos eixos coordenados e, neste caso, o seu valor é a soma das coordenadas das respectivas direcções.

c) A função não é diferenciável na origem pois não existe derivada direccional na origem segundo qualquer direcção.

IV

Tem-se $g(0,1)=f(0,e,0)$ e sejam $u(x,y)=sen(xy^2)$, $v(x,y)=e^y$, e $w(x,y)=\log(1+x^2)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=y^2\cos(xy^2)f_u'+\frac{2x}{1+x^2}f_w'$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=2xy\cos(xy^2)f_u'+e^y f_v'.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)+\frac{\partial g}{\partial y}(0,1)=f_u'(0,e,0)+ef_v'(0,e,0)=e-e=0.$$

V

a) $\nabla f(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2xy^2=0\\-2x^2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\0=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=\pm 1\\x=0\end{cases}$

Os pontos críticos são todos os pontos da forma $(0,y)$ com $y\in\Re$, ou seja a recta $x=0$.

b) Por definição, o ponto $(0,1)$ é um ponto de sela da função se é um ponto crítico, o que ficou provado na alínea anterior, e se não é um extremante, isto é $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{b,c\in B_\varepsilon((0,1))}\ f(b)<f(0,1)=3<f(c)$.

$f(h,1+h)_{h\neq 0}=3-h^3(2+h):\begin{cases}<3 \text{ se } h>0\\>3 \text{ se } -2<h<0\end{cases}$. Assim provámos que $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{(h,1+h):|h|<\varepsilon/\sqrt{2}}\ f(h,1+h)_{h>0}<f(0,1)<f(h,1+h)_{h<0}$, o que conclui a prova de que o ponto $(0,1)$ é um ponto de sela da função.

VI

Por hipótese $f(z_0)=0$, e para todo o $z\neq z_0$ podemos escrever $f(z)=\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)$, de forma semelhante se justifica que $g(z)=\dfrac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)$. Tem-se então

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)}\Rightarrow\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}\underset{hip}{=}\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

com $g'(z_0)\neq 0$ por hipótese.