Época Normal AMII – 3 de Junho de 2016

Soluções

I

$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{2^n}(x+1)^n$, $\forall x\in(-3,1)$.

II

a) $D_f=\{(x,y)\in\Re^2 : 0<\|(x,y)\|<1\}=\{(x,y)\in\Re^2 :\}$.

b) $\operatorname{int} D_f=\{(x,y)\in\Re^2 : (x,y)\neq(0,0)\wedge x^2+y^2<1\}$,

$fr\, D_f=\{(x,y)\in\Re^2 : x^2+y^2=1\vee x=y=0\}$.

c) Verdade. Como D_f é um conjunto aberto então qualquer seu ponto é um ponto interior que é o que exprime a proposição, ou seja D_f é um conjunto aberto.

III

a) $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\begin{cases}2v_1 \text{ se } v_1=v_2\\ 0 \text{ se } v_1\neq v_2\end{cases}$, $\forall v\in\Re^2\setminus\{(0,0)\}$.

c) Como $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\varepsilon(h_1,h_2)=\begin{cases}0 \text{ se } h_1\neq h_2\\ \textbf{não existe se } h_1=h_2\end{cases}$, conclui-se que f não é diferenciável na origem.

IV

a) $f(\lambda x,\lambda y)=e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}}-g\left(\frac{\lambda y-\lambda x}{\lambda x}\right)=e^{\frac{x}{y}}-g\left(\frac{y-x}{x}\right)=\lambda^0 f(x,y)$, f é homogénea de grau 0.

b)

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=x\left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}+g'(u)\frac{y}{x^2}\right)+y\left(-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}-g'(u)\frac{1}{x}\right)=0=0f,\ \textbf{com}\ u(x,y)=\frac{y-x}{x}.$$

c) f é diferenciável no ponto $(1,1)$ pois resulta da soma algébrica de duas funções diferenciáveis naquele ponto, assim $\frac{\partial f}{\partial(u,u)}(1,1) = \nabla f(1,1).(u,u) = u(e+1) + u(-e-1) = 0 \ \forall_{u \neq 0}$.

V

Os pontos críticos são $\left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) \forall k \in Z$ e são pontos de sela quer k seja par ou ímpar.

VI

a) $\alpha = -3 \ \forall_{(x,y) \in \Re^2}$.

b) $v(x,y) = x^3 - y^3 + 3x^2 y - 3xy^2$, a derivada é $f'(-i) = -3(1+i)$.