Cap. 3 Análise de Decisão

Sistemas de Apoio à Decisão (Optativa)

Abril 2018

M Cândida Mourão
cmourao@iseg.ulisboa.pt

2017/18

Análise de Decisão

- Análise de Decisão
  - Modelação
  - Critérios de Decisão
    - Não Probabilísticos
    - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- Decisão Com Incorporação de Experiência
- Árvores de Decisão
- Resolução com o *Tree Plan/Excel*

Análise de Decisão - Modelação

1) Ações: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

- Identificar e enumerar TODAS as Ações de forma
  - EXAUSTIVA – não ignorar ações
  - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou possibilidade de escolha múltipla
- Objetivo – escolher uma e uma só ação de $\boldsymbol{A}$

2) Estados da Natureza: $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$

- Identificar e enumerar TODOS os Estados da Natureza de forma
  - EXAUSTIVA – não ignorar estados da natureza
  - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou ambiguidades
- Ocorre um e um só estado!
- O decisor só conhece o estado depois de escolhida a ação

Análise de Decisão - Exemplo

Exemplo Protótipo - (H&L, pg. 673)

The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

However, before deciding whether to drill or sell, another option is to conduct a detailed seismic survey of the land to obtain a better estimate of the probability of finding oil. Section 15.3 discusses this case of *decision making with experimentation*, at which point the necessary additional data will be provided.

Análise de Decisão - Modelação

3) Função Ganho (Proveito)

- Avaliar as ações em função das consequências que arrastam e das preferências do decisor por tais consequências
- $p(a_i, \theta_k)$ ganho de tomar a ação $a_i \in \in A$ e o estado da natureza ser $\theta_k \in \Theta$ $(i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n)$
- Eliminar do estudo eventuais ações dominadas!

- Critérios de Decisão
  - Não Probabilísticos: MAXIMIN
  - Probabilísticos: Bayes; Máxima Verosimilhança

Decisão Sem Experiência - Exemplo

- Identificar a matriz de ganhos para o exemplo protótipo

Ações: Estados da natureza:

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1			
a_2			

Decisão Sem Experiência - Exemplo

- Identificar a matriz de ganhos para o exemplo protótipo

Ações:

a_1 – manter o terreno e explorar
a_2 – vender o terreno

Estados da natureza:

θ_1 – existe petróleo
θ_2 – não existe petróleo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	

Análise de Decisão

Problemas a responder

- Que ação escolher?
- Qual o ganho esperado da ação escolhida?
- Valerá a pena efetuar uma experiência (sondagem; estudo de mercado; ...) para diminuir a incerteza?

  Será que o aumento no ganho esperado resultante da realização de uma experiência compensa o custo da mesma?

  Qual o Preço de reduzir a incerteza?
- Qual o preço que estamos dispostos a pagar para eliminar a incerteza?

Decisão Sem Experiência

Critério de Decisão Não Probabilístico

Princípio de Decisão MAXIMIN (Wald, 1945)

- Critério pessimista ⟹ a natureza "é do contra"! O estado de natureza será o pior possível para a ação que o decisor escolher.
- Cada Ação $\xrightarrow{\text{natureza é adversa}}$ o ganho mínimo

Ação maximin ⟹ maximiza o ganho mínimo

$$\max_{1\leq i\leq m}\left\{\min_{1\leq k\leq n}\{p(a_i,\theta_k)\}\right\}$$

Decisão Sem Experiência - Exemplo

- Ação MaxiMim para o exemplo protótipo

$p(a_i,\theta_k)$	θ_1	θ_2	min
a_1	700	-100	
a_2	90	90	

R: a ação maximin é !

Decisão Sem Experiência - Exemplo

- Ação MaxiMim para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	min
a_1	700	-100	-100
a_2	90	90	90

máx

R: a ação maximin é $\tilde{a} = a_2$!

Decisão Sem Experiência

Princípio de Decisão MAXIMIN

Vantagens

- Protege o decisor contra o "pior caso"
- Garante um ganho mínimo
- Não permite perdas disparatadas

Adapta-se a situações de

- Forte aversão ao risco
- Concorrência agressiva

Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	-80	-90	-50	
a_2	2200	3000	-100	

R:

Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	θ_3	
a_1	-80	-90	-50	
a_2	2200	3000	-100	

R: ação maximin é $\tilde{a} = a_1$!

Decisão Sem Experiência

Critério de Decisão Probabilístico

Princípio de Decisão Bayes

Informação do decisor sobre os estados da natureza (v.a.) traduzida por uma distribuição de probabilidade – distribuição *a priori*

$h_\theta(k) = P[\theta = \theta_k]$ probabilidade *a priori* do estado θ_k

Princípio de Bayes - ação que maximiza o ganho esperado (risco de Bayes), ou seja, a ação correspondente a:

$$\max_{1 \le i \le m} \left\{ \sum_{k=1}^{n} h_\theta(k)\, p(a_i, \theta_k) \right\} = \max_{1 \le i \le m} \{E[p(a_i, \theta)]\}$$

Decisão Sem Experiência

- Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2
a_1	700	-100
a_2	90	90
$h_\theta(k)$		

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

Decisão Sem Experiência

- Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_\theta(k)$	¼	¾	1

$$E[p(a_1, \theta)] = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times (-100) = 100$$

$$E[p(a_2, \theta)] = 90$$

$\boxed{a_h = a_1!}$

Decisão Com Experiência

- Valerá a pena recorrer a experimentação para diminuir a incerteza?
- O ***valor esperado da informação perfeita*** $(EVPI)$ = valor que o decisor paga para retirar a incerteza, para ter a certeza de qual dos estados se irá observar!
- a_h = ação Bayes (sem experiência), com ganho esperado $E[p(a_h, \theta)]$

$$EVPI = EP - E[p(a_h, \theta)]$$

com EP = ganho esperado com informação perfeita (IP), logo:

$$EP = \sum_{k=1}^{n} h_\theta(k)\, p(\tilde{a}^k, \theta_k)$$

e $\tilde{a}^k$ é a ação a escolher se o estado da natureza é θ_k (melhor ação para $\theta = \theta_k$)

Valor Esperado da Informação Perfeita

Exemplo Protótipo

- Valor esperado da Informação Perfeita - $EVPI$

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_\theta(k)$	¼	¾	1

Valor a pagar para eliminar a incerteza!

- Se souber que $\theta = \theta_1$ escolho $\boxed{}$ com ganho $\boxed{}$
- Se souber que $\theta = \theta_2$ escolho $\boxed{}$ com ganho $\boxed{}$

$EVPI =$

Valor Esperado da Informação Perfeita

- Valor esperado da Informação Perfeita - $EVPI$

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$h_\theta(k)$	¼	¾	1

Valor a pagar para eliminar a incerteza!

- Se souber que $\theta = \theta_1$ escolho a_1 com ganho 700
- Se souber que $\theta = \theta_2$ escolho a_2 com ganho 90

$$\Longrightarrow EP = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times 90 = 242{,}5$$

$$EVPI = 242{,}5 - 100 = 142{,}5$$

Decisão Com Experiência

- Se realizar uma experiência (diminuir a incerteza) a ação a escolher deve depender do resultado da experiência. O decisor deve ter uma função de decisão que o ajude a escolher em função dos resultados da experiência
- Questões:
  - Deve ou não ser feita a experiência?
  - Se optar pela experiência que ação escolher, em função do resultado da experiência?
- Optando pela função de decisão Bayes, a ação é escolhida aplicando o princípio de Bayes ao ganho esperado para as probabilidades revistas (*a posteriori*), tendo em conta cada um dos possíveis resultados da experiência e as probabilidades destes resultados!

Decisão Com Experiência

Seja:

- S v.a. ☛ informação adicional da experiência
- $h_\theta(k)$ ☛ probabilidades *a priori*
- $Q_{S|\theta=\theta_k}(s) = P(S = s|\theta = \theta_k)$ ☛ função de verosimilhança da experiência

  credibilidade da experiência em face de resultados passados
- $P_{\theta S}(\theta_k, s) = P(S = s|\theta = \theta_k)\, P(\theta = \theta_k)$ é a f.d. conjunta do par aleatório (θ, S)
- $P(S = s) = \sum_{k=1}^{n} P(S = s|\theta = \theta_k)\, P(\theta = \theta_k)$ é a f.d. marginal da v.a. S

Decisão Com Experiência

- **Método:**

1) Calcular as probabilidades *a posteriori*

$$P(\theta = \theta_k | S = s) = \frac{P(S = s|\theta = \theta_k)\, P(\theta = \theta_k)}{\sum_{k=1}^{n}[P(S = s|\theta = \theta_k)\, P(\theta = \theta_k)]}$$

Excel

   - As probabilidades *a posteriori* representam a probabilidade de cada estado, condicionada ao resultado da experiência.

2) Para cada resultado possível da experiência, e tendo em conta as probabilidades *a posteriori*, determinar a ação Bayes

3) Calcular o ganho esperado da experiência, tendo em conta a f.d. marginal de S e as ações Bayes para cada resultado possível.

- **Árvores de Decisão** – alternativa!

Decisão Com Experiência - Exemplo

Exemplo Protótipo (continuação – H&L pág. 680)

Considere-se que é possível a elaboração de testes sísmicos ao terreno, para avaliar a possível existência de petróleo no subsolo, a um custo de *30 000 u.m.*.

Deste teste pode obter-se um de dois resultados: FSS (é provável a existência de petróleo) ou USS (não é provável a existência de petróleo).

Da observação passada em áreas semelhantes sabe-se que: o teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

a) Valerá a pena efectuar um teste sísmico?

b) Qual a ação que deve ser escolhida para cada um dos resultados do teste?

c) Qual o valor esperado do ganho associado à realização do teste?

Decisão Com Experiência - Exemplo

Determinar a ação Bayes tendo em conta o resultado obtido:

- Calcular as probabilidades *a posteriori* para cada resultado da experiência;
- Identificar a ação Bayes com as probabilidades *a posteriori* de $\theta = \theta_k$

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
Prob *a posteriori*			1

Decisão Com Experiência - Exemplo

- Se o teste deu como resultado $S = \text{‘}FSS\text{’}$

Excel

(prob. *a posteriori*)

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta = \theta_k / S = \text{‘}FSS\text{’}]$			

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

Decisão Com Experiência - Exemplo

- Se o teste deu como resultado $S = \text{'}FSS\text{'}$

Excel

(prob. *a posteriori*)

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta = \theta_k / S = \text{'}FSS\text{'}]$	½	½	1

$$E[p(a_1,\theta)] = \frac{1}{2}\times 700 + \frac{1}{2}\times(-100) = 300$$

$$E[p(a_2,\theta)] = 90$$

Se for efetuado o teste e $S = \text{'}FSS\text{'},\ a_h = a_1!$

Decisão Com Experiência - Exemplo

- Se o teste deu como resultado $S = \text{'}USS\text{'}$

Excel

(prob. *a posteriori*)

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta = \theta_k / S = \text{'}USS\text{'}]$			

$$E[p(a_1,\theta)] =$$

$$E[p(a_2,\theta)] =$$

Decisão Com Experiência - Exemplo

- Se o teste deu como resultado $S = \text{'}USS\text{'}$

Excel

(prob. *a posteriori*)

$p(a_i, \theta_k)$	θ_1	θ_2	
a_1	700	-100	
a_2	90	90	
$P[\theta = \theta_k / S = \text{'}USS\text{'}]$	0,14	0,86	1

$$E[p(a_1, \theta)] = 0{,}14 \times 700 + 0{,}86 \times (-100) = 12$$

$$E[p(a_2, \theta)] = 90$$

Se for efetuado o teste e $S = \text{'}USS\text{'}$, $a_h = a_2$!

Decisão Com Experiência - Exemplo

- Ganho Esperado da Experiência

Excel

(f.d. marginal de S)

S	FSS	USS
Ação Bayes	a_1	a_2
Ganho Esperado	300	90
$P[S = s]$		

$EVE =$

R:

Decisão Com Experiência - Exemplo

- Ganho Esperado da Experiência

S	FSS	USS
Ação Bayes	a_1	a_2
Ganho Esperado	300	90
$P[S = s]$	0,3	0,7

Excel

(f.d. marginal de S)

$$EVE = 0{,}3 \times 300 + 0{,}7 \times 90 - 100 = 53$$ (em 1000 u.m.)

R: Vale a pena fazer o teste, que custa 30 000 u.m.!

Árvores de Decisão

Usam-se quando:

1) Existem ações sequenciais no tempo (Experiências,...)
2) Estados de natureza com probabilidades associadas distintas

Árvore de Decisão - 2 tipos de nodos:

□ Nodos de Decisão – a escolha do caminho a seguir é do decisor

○ Nodos Causais (ou aleatórios) – a determinação do caminho é em função de acontecimentos que o decisor não controla

Excel / TreePlan