

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha N°8

1. A função $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ verifica $f(0) = f(4)$. Esse facto permite concluir que existe um ponto $x \in]0, 4[$ que verifique $f'(x) = 0$? Justifique.
2. Considere a função $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem exactamente 3 soluções.
3. Seja f uma função n vezes derivável no intervalo $]a, b[$ e suponha que a equação $f(x) = 0$ tem $n + 1$ raízes distintas no intervalo $]a, b[$. Mostre que existe $c \in]a, c[$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$.
4. Seja f uma função que admite derivada de qualquer ordem em todos os pontos de uma vizinhança de 0. Suponha que existe uma sucessão x_n tal que

$$\lim x_n = 0, \quad f(x_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Prove que $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0$.
 - (b) Dê um exemplo de uma função que não seja idênticamente nula em nenhuma vizinhança de 0 e que verifique todas as condições do enunciado.
5. Calcule os seguintes limites, caso existam:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\cot g x}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$;
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$;
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$;
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin mx}{\ln \sin x}, \quad m > 0$;
- (h) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \sin \frac{a}{x}, \quad a \neq 0, n > 0$;
- (j) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x-1)$;
- (k) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$;

- (l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$;
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;
- (n) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}$;
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;
- (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}, \quad (a > 0)$;
- (q) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) \arccos x$;
- (r) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$;
- (s) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;
- (t) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x - 1}$;
- (u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2^{-\frac{1}{x}} \right)^{\sin \frac{1}{x}}$.