

ANÁLISE MATEMÁTICA I

Ficha N°12

1. Considere duas funções integráveis $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.

(a) Mostre que a função $x \mapsto f(x)g(x)$ é integrável no intervalo $[a, b]$.

(b) Prove que é válida a desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx.$$

2. Sejam: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, uma função contínua e $g : [a, b] \mapsto [0, +\infty[$, uma função integrável.

(a) Mostre que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

(b) O resultado ainda é válido se g tomar valores positivos e negativos? Justifique.

3. Considere uma função contínua $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, tal que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Mostre que a equação $f(x) = 0$ admite pelo menos uma raiz no intervalo $]a, b[$.

4. Considere a função $F :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x e^{\frac{t^2+1}{t}} \frac{1}{t} dt.$$

Mostre que para todo $x > 0$ se verifica $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$.

5. Considere a função $\varphi :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt.$$

(a) Calcule $\varphi(2)$;

(b) Mostre que φ é diferenciável e calcule $\varphi'(x)$ $x > 0$;

(c) Estude φ quanto ao crescimento e mostre que existe um único ponto $c > 0$ que verifica $\varphi(c) = 0$.

6. Sejam $u, v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, funções contínuas, $a, b \in \mathbb{R}$ constantes e suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica a igualdade

$$\int_a^x u(t)dt = \int_b^x v(t)dt.$$

Mostre que $u = v$ e que $\int_a^b u(t)dt = 0$.

7. Seja $\varphi : \mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[$, uma função contínua e seja

$$\psi(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Estude o sinal de ψ .
- (b) Mostre que ψ é derivável e calcule ψ' .
- (c) Mostre que ψ é estritamente decrescente no intervalo $] -\infty, 0[$.
- (d) Mostre que ψ tem um mínimo global e verifica

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \psi(x) < 0.$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, uma função contínua e seja $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$, a função definida por

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

- (a) Determine $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
 - (b) Prove que g é constante em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se e só se f for constante.
 - (c) Prove que o contradomínio de g está contido no contradomínio de f .
 - (d) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, dê um exemplo de uma função f contínua em \mathbb{R} , sem limite quando $x \rightarrow +\infty$, tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \alpha$.
9. Uma função $f : [-a, a] \mapsto \mathbb{R}$ diz-se **ímpar** se verificar

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in [-a, a],$$

diz-se **par** se verificar

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in [-a, a],$$

- (a) Mostre que, se f for integrável, então

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \quad \text{se } f \text{ for par;}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \quad \text{se } f \text{ for ímpar.}$$

(b) Calcule os seguintes integrais:

i. $\int_{-2}^2 \frac{\sin x}{1+x^8} dx$;

ii. $\int_{-1}^1 |x| dx$;

iii. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

10. Supondo que f e g são funções contínuas, prove as seguintes igualdades:

(a) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$;

(b) $\int_0^t f(x)g(t-x) dx = \int_0^t g(x)f(t-x) dx$;

(c) $\int_0^1 \frac{1}{\arccos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

11. Determine o sinal do integral $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.