Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

PROBABILIDADES

7 de janeiro de 2011   Exame Final – Época Normal   Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Seja (X,Y) um par aleatório tal que

$$f(x,y) = ky^{-3}(x+1), 0 < x < 1, y > 1 \quad \text{e} \quad f_1(x) = \frac{2}{3}(x+1), 0 < x < 1.$$

   a) Mostre que $k = \frac{4}{3}$ e verifique que X e Y são v.a. independentes.
   b) Calcule $P[X < 0.6]$, recorrendo sucessivamente a $f(x,y)$ e a $f(x|y=6)$.
   c) Caracterize $F_2(y)$ e use-a para calcular $P\left(2Y > 6 \middle| \frac{Y}{2} < 7\right)$.
   d) Calcule a probabilidade aproximada de a média aritmética de 50 observações independentes da v.a. X não exceder $E[X] - \frac{2}{9}$.
   e) Obtenha a f.g.m. da v.a. $Z = X^2 + 2X$.

2. Um dispositivo que mede e regista continuamente a atividade sísmica foi colocado numa região remota. O tempo T que decorre até que o dispositivo se avarie é uma v.a. com distribuição exponencial de média 3 anos. O funcionamento do dispositivo é controlado de dois em dois anos: se estiver avariado, é substituído; se não, nada se faz.
   a) Calcule a probabilidade de os técnicos que fazem o controlo encontrarem o dispositivo avariado.
   b) A dada altura foram colocados 5 desses aparelhos, de funcionamentos independentes. Qual a probabilidade de, em 3 controlos sucessivos, os técnicos encontrarem os 5 aparelhos em funcionamento no primeiro e no segundo controlos e encontrarem todos avariados no terceiro?
   c) Relativamente aos 5 aparelhos de b), calcule a probabilidade de a sua duração total não ultrapassar 24 anos.
   d) Em determinada região, quando se faz o primeiro controlo no dispositivo incorpora-se-lhe um alarme que sinalizará a existência de avaria, mal esta ocorra. Explique o significado da v.a. $V = \max(T, 2)$ e calcule o seu valor esperado.

3. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. mutuamente independentes tais que $X_i \sim \text{logNormal}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, .., n.$ Mostre que $\Pi_n = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \sim \text{logNormal}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$ e também que $\frac{1}{\Pi_n} \sim \text{logNormal}\left(-\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$.

Cada alínea das questões 1 e 2 e a questão 3 têm cotação 20.

Soluções:

1-b)

$$\int_{1}^{\infty}\int_{0}^{0.6} f(x,y)\,dx\,dy = 0.52$$

$$\int_{0}^{0.6} f_1(x)\,dx = 0.52$$

1-c)

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{y^2}, & y \ge 1 \end{cases}; \ 0.107$$

1-d)

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{50} \le E[X] - \frac{2}{9} \right) \cong \Phi(-5.547) \cong 0$$

1-e)

$$M_Z(s) = E\left[e^{s\left(X^2 - 2X\right)} \right] = \int_0^1 e^{s\left(x^2 - 2x\right)} f_1(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{3s}\left(e^{3s} - 1\right), & s \ne 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

2-a) 0.487

2-b) 0.036^5

2-c) 0.9

2-d) $V = \begin{cases} 2, & T < 2 \\ T, & T \ge 2 \end{cases}$; $E[V] = 3.54$

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

PROBABILIDADES

25 de janeiro de 2011 Exame Final – Época de Recurso Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Um atuário verificou que o número de sinistros/ano por apólice, em determinada carteira, é uma v.a. X com distribuição de Poisson, em que a probabilidade de uma qualquer apólice dar origem a 2 sinistros é tripla da probabilidade de dar origem a 4 sinistros. Verificou ainda que o número de sinistros/ano por apólice, noutra carteira do mesmo ramo, é uma v.a. Y que não assume valores superiores a 8 e tem distribuição Binomial com média igual à de X.

a) Justifique que $f(x)=\frac{e^{-2}2^x}{x!}, x=0,1,2,...$ e $f(y)=\binom{8}{y}\left(\frac{1}{4}\right)^y\left(\frac{3}{4}\right)^{8-y}, y=0,...,8,$ e compare as duas distribuições recorrendo aos respetivos coeficientes de variação $(CV=\sigma/\mu)$.

b) Calcule $P(X\geq 3)$ e $P(Y\leq 3)$.

c) Sabendo que $\rho_{XY}=0.4,$ calcule $E[Z]$ e $Var(Z),\ Z=2X-3Y.$

d) Relativamente a uma apólice da primeira carteira, que entrou em vigor a 1 de maio de 2010, já deram entrada 3 participações. Calcule a probabilidade de essa apólice originar 5 sinistros no ano em curso (que termina a 30 de abril).

e) Uma grande empresa detém 15 das referidas apólices, das quais 10 são da primeira carteira. Periodicamente, um funcionário faz a análise dos contratos, para ver se há possibilidades de negociar condições mais vantajosas. Numa dessas vezes, foi retirando os contratos um por um, sem qualquer critério, e quando terminou o dia tinha analisado 6. Qual a probabilidade de ter escolhido 3 de cada carteira?

2. Num outro estudo, o atuário acima concluiu que o custo anual total (milhões de euros) reportado por uma companhia com o seu seguro automóvel pode ser decomposto em danos materiais (v.a X_1) e em responsabilidade civil (v.a. X_2), com f.d.p. conjunta

$$f(x_1,x_2)=\frac{2x_1+2-x_2}{4},\quad 0<x_1<1;\quad 0<x_2<2.$$

a) O acontecimento A realiza-se quando $X_1\leq 0.5$ e o acontecimento B quando $X_1+X_2\geq 1.$ Calcule e interprete $P(A\cup B)$ e $P(A-B)$.

b) Usando $f(x_1,x_2)$ e uma das f.d.p. marginais, calcule a probabilidade de o custo total exceder 2 milhões de euros, num ano em que se sabe que os custos com responsabilidade civil são inferiores a 1.5 milhões.

c) Desenhe o gráfico de uma das curvas de regressão (tipo I) e comente o interesse da informação que fornece.

d) No país há 34 companhias com carteiras independentes, mas idênticas à carteira em análise. Calcule a probabilidade aproximada de esse segmento suportar mais de 20 milhões de euros/ano, com os danos materiais resultantes de sinistros automóveis.

3. O volume dos prémios mensais da companhia **C_1** é uma v.a com f.d.p. f, positiva e contínua num intervalo $]a,b[$. A companhia **C_2** tem um volume de prémios mensais igual à soma de 120 com metade do volume dos prémios de **C_1**.
Exprima a f.d.p. do volume mensal de prémios cobrados por **C_2**, como função de f,a e b.

Cotação de cada alínea das questões 1 e 2 e da questão 3: 20

Soluções:

1-a)

$$P(X=2)=3P(X=4)\Rightarrow \lambda=2; CV=0.71$$

$$np=2, n=8\Rightarrow p=\frac{1}{4}; CV=0.61$$

1-b) 0.3233; 0.8952

1-c) 13.186

1-d) 0.1117

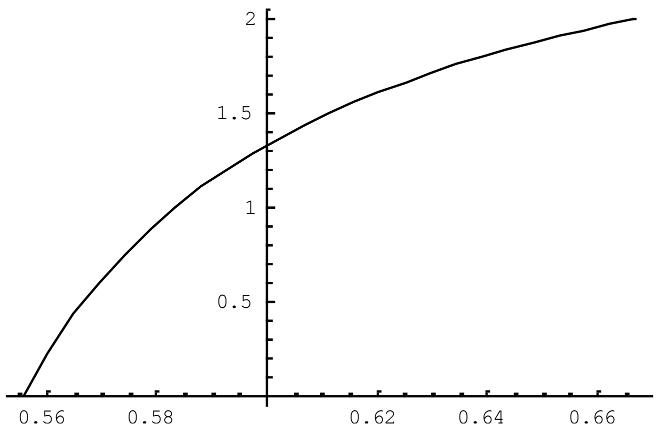
1-e) 0.24

2-a) 0.9; 0.193 $P(A)=3/8$; $P(B)=17/24$; $P(A\cap B)=35/192$, mas é preferível calcular logo as probabilidades pedidas diretamente.

2-b) 7/81 $P(0.5<X_1<1;\ \ 2-x_1<X_2>1.5)=7/96$; $P(0<X_2>1.5)=27/32$

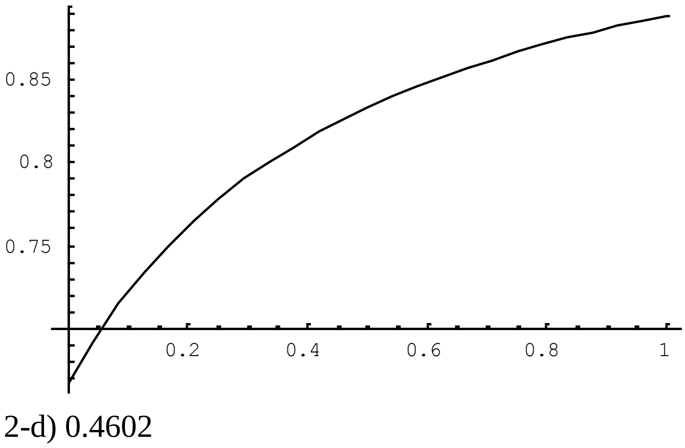
2-c)

$$\left\{(x_1,x_2): x_1=\frac{10-3x_2}{6(3-x_2)}, 0<x_2<2\right\}$$



ou

$$\left\{(x_1,x_2): x_2=\frac{2+6x_1}{3+6x_1}, 0<x_1<1\right\}$$



2-d) 0.4602

3. $f_2(v_2)=2f(2(v_2-120))$, $120+\frac{a}{2}<v_2<120+\frac{b}{2}$, $V_1,V_2...$

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

PROBABILIDADES

12 de janeiro de 2012 Exame Final – Época Normal Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Dois alunos, A1 e A2, trabalham a tempo parcial numa das lojas de uma grande cadeia de *fast-food*. São diariamente avaliados pelo seu desempenho, com 1 ponto, 2 pontos ou 3 pontos.
Na tabela seguinte encontram-se alguns valores de $f(x,y)$, onde X é o número de pontos atribuídos a A1 e Y representa a pontuação atribuída a A2, num qualquer dia.

$f(x,y)$	1	2	3
1			0.05
2			0.04
3			0.21

Sabe-se ainda que $E[Y]=2.1$; $f_1(x)=\begin{cases}0.2, & x=1\\ 0.3, & x=2\\ 0.5, & x=3\end{cases}$; $f(x|y=1)=\begin{cases}0.6, & x=1\\ 0.3, & x=2\\ 0.1, & x=3\end{cases}$

a) Usando os elementos dados, complete o quadro que define $f(x,y)$.

b) Interprete e calcule $P(X\geq 2)$ e $P(X\geq 2|Y\geq 2)$. Conclua sobre a independência entre as variáveis.
Sugestão: Se não resolveu a alínea anterior, preencha o quadro (em linha) com os valores 0.12, 0.03, 0.06, 0.20, 0.02, 0.27.

c) Calcule ρ_{XY} Comente, tendo também em atenção a curva de regressão (Tipo I) de X sobre Y, de que já são conhecidos os pontos $(2.48,2)$ e $(2.53,3)$.

2. O fabricante de um refrigerante disponível nas lojas da cadeia dá brindes em 10% das latas. Considerem-se os seguintes acontecimentos, relativos à compra de latas por um apreciador do refrigerante, até ser premiado:

A: realiza-se quando é necessário comprar, no máximo, 10 latas para se ganhar um brinde;
B: realiza-se quando é necessário comprar mais de 10 latas, mas não mais de 20, para se ser premiado;
$C=\overline{A\cup B}$.

a) Verifique que $P(A)=0.651$ e $P(C)=0.122$.

b) De outras campanhas idênticas, sabe-se que 0.25 dos premiados têm 30 ou mais anos, metade dos quais indicaram ter comprado menos de 11 bebidas até ganhar um prémio. Qual a probabilidade de um premiado, escolhido ao acaso, ter menos de 30 anos e também ter que comprar menos de 11 latas, até ganhar um brinde?

3. Todos os trimestres o funcionário mais pontuado em cada loja participa numa espécie de concurso nacional. Uma das provas é classificada por dois jurados, J1 e J2, numa escala de 0 a 100. Seja (X_1,X_2) o vetor aleatório das pontuações atribuídas a uma qualquer dessas provas pelos jurados J1 e J2, respetivamente. Sem perda significativa de aderência à realidade, ajustou--se que as v.a. são do tipo contínuo e tais que $X_1\sim N(83,2^2)$, $X_2\sim N(85,5^2)$, $\rho_{X_1X_2}=0.7$.

a) Justifique que $X_2-X_1\sim N\left(2,\sqrt{15}^{\,2}\right)$ e $X_1+X_2\sim N\left(168,\sqrt{43}^{\,2}\right)$.

b) O jurado J2 tem fama de ser MUITO mais generoso do que J1. Calculando uma probabilidade que lhe pareça adequada, estude se essa reputação é exagerada.

c) Calcule a probabilidade de a média aritmética das pontuações atribuídas pelos dois jurados a uma qualquer prova não exceder 88.

d) Outra das provas consiste em atender quatro famílias, o mais rapidamente possível, uma delas instruída para se mostrar particularmente difícil. Seja (T_1, T_2, T_3, T_4) o vetor aleatório dos tempos de atendimento, em minutos, das quatro famílias. As quatro v.a. são mutuamente independentes e T_1, T_2 e T_3 têm distribuição exponencial, com parâmetro $1/5$. T_4 também tem distribuição exponencial, mas a duração média do atendimento é de 10 minutos.
Estude se a probabilidade de a quarta família demorar mais tempo a ser atendida do que as outras três em conjunto é superior a 0.05.

3. X e Y são v.a. i.i.d. tais que $M_{X+Y}(s) = 0.09e^{-2s} + 0.24e^{-s} + 0.34 + 0.24e^{s} + 0.09e^{2s}$.
Determine a função de distribuição comum às duas v.a.

Cotação de cada questão: 20.

Soluções:

1-a)

X \ Y	1	2	3
1	0.12	0.03	0.05
2	0.06	0.20	0.04
3	0.02	0.27	0.21

1-b) 0.8…; 0.9…; não são independentes

1-c) 0.421; $\left\{(x,y) \in R^2 : x = E[X \mid y],\ f_2(y) > 0\right\} = \left\{(1.5,1), (2.48,2), (2.53,3)\right\}$

2-b) 0.526

3-b) Por exemplo, aproveitando um dos resultados em a):

$P(X_2 > X_1) = 0.6985$; ou $P(X_2 - X_1 > 5) = 0.2177$; …

Há alguma diferença, sim.

3-c) 0.8888

3-d) $P\left(F_{(2,6)} > 1.5\right) > P\left(F_{(2,6)} > 5.14\right) = 0.05$

4. Por inspeção da fgm e atendendo a que existe uma correspondência biunívoca entre $M_{X+Y}(s)$ e $F(x+y) \equiv F_1(x)F_2(y)$.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.3, & -1 \le x < 0 \\ 0.7, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$; $F_2(y)$ é da mesma forma.

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

PROBABILIDADES – LICENCIATURA EM MAEG

27 de janeiro de 2012 Exame Final – Época de Recurso Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Numa luxuosa estância balnear, todos os dias pelas 6.00 se mede o desvio do nível das águas de uma piscina "natural", ligada ao oceano, relativamente a certo nível padrão, gravado na rocha. O resultado da medição, em metros, é observação de uma v.a. X com distribuição $f(x)=1-|x|, \quad -1<x<1.$

   a) Calcule a probabilidade de o desvio absoluto não exceder 0.8 metros, nos dias em que é superior a 0.5 metros.

   b) Deduza que $E\left[X^k\right]=\dfrac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}-\dfrac{1+(-1)^{k+2}}{k+2}, k=1,2,...$ e justifique que cada momento central da distribuição coincide com o momento ordinário da mesma ordem.

   c) Use os resultados em b) para caracterizar a distribuição do desvio quanto à localização, dispersão, assimetria e ao excesso (curtose).

   d) Afundou-se a piscina 0.5 metros, tudo o mais constante – inclusivamente, garantiu-se que a quantidade de água na piscina ao longo do dia é sensivelmente a mesma que havia antes da obra (prodígios da moderna tecnologia). Seja Y a v.a. que representa agora o desvio do nível das águas da piscina, em metros, relativamente ao mesmo nível padrão.
   Obtenha a função de distribuição de Y e compare-a com a distribuição de X quanto à localização, dispersão, assimetria e ao excesso (não calcule os respetivos coeficientes).

2. A piscina abre ao público às 8:00. Os hóspedes chegam segundo um processo aproximado de Poisson à média de 4 entre as 8 e as 9 e à média de 10 por hora, entre as 9 e as 11.

   a) Calcule a probabilidade de, num qualquer dia, terem chegado menos de 12 hóspedes antes das 10:30. Qual a probabilidade de, começando a contar a partir de amanhã, e até ao fim do corrente mês, essa ocorrência só se observar uma única vez?

   b) Qual a probabilidade aproximada de, num qualquer dia, chegarem à piscina mais de 33 hóspedes, até às 11 horas?

3. Considere o vetor aleatório (X,Y), X o número de portugueses e Y o número de noruegueses, que passarão uma temporada na estância balnear em 2012. Admite-se que X e Y são v.a. independentes, $P(X=x+1)=\dfrac{1}{5}P(X=x), x=0,1,2,...$ e $f_2(y)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{y+1}, y=0,1,2,...$

   a) Deduza que $f_1(x)=\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^x, x=0,1,2,...$

   b) Calcule a probabilidade de, em 2012, a estância poder contar com menos de dois hóspedes portugueses e pelo menos dois hóspedes noruegueses.

   c) Use $M_X(s)=\dfrac{4}{5-e^s}, s<\ln 5,$ para determinar a f.g.m. centrais, $M_{X-\mu}(s)$.

4. No chamado "Casino da Praia" um dado equilibrado é lançado repetidamente. Seja X a v.a. que representa o número de lançamentos até sair um 5 e seja Y a v.a. que representa o número de lançamentos até sair um 6. Calcule $\mathrm{E}[X \mid Y=2]$.

Cotação de cada questão: 20.

Soluções:

1-a) 0.84
1-b) $E[X] = 0$ e a distribuição é simétrica em torno da origem
1-c) Média nula, variância 1/6, simétrica e com curtose 2.4…
1-d) $1.125 + 1.5y + \frac{y^2}{2}, -1.5 \leq y < -0.5$; $0.875 + 0.5y - \frac{y^2}{2}, -0.5 \leq y < 0.5$
só há mudança na localização: a distribuição desloca-se -0.5m.

2-a) 0.0348; 0.125
2-b) 0.033

3-b) 0.24
3-c) $M_{X-\mu}(s) = \frac{4e^{-s/4}}{5-e^s} s < ln5$

4. 6.6

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

PROBABILIDADES – LICENCIATURA EM MAEG

09 de janeiro de 2013 Exame Final – Época Normal Duração: 2h + 15m

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Uma produtora cinematográfica conduziu um estudo que revelou a seguinte composição da assistência aos seus filmes: 43% dos espetadores são americanos (acontecimento A_1), 36% são europeus (acontecimento A_2), 15% são asiáticos (acontecimento A_3) e 6% são dos outros continentes (acontecimento A_4); 60% dos espetadores são mulheres (acontecimento B).

a) Escreva as condições que as probabilidades $P(A_i \cap B)$, $i = 1,2,3,4$, devem satisfazer. Proponha valores concretos para essas probabilidades e também para $P\left(A_i \cap \overline{B}\right)$, $i = 1,2,3,4$.

b) Dos muitos espetadores que, em todo o mundo, participaram do estudo, foram sorteados dez para uma viagem. Usando as probabilidades propostas em a), calcule a probabilidade de terem sido escolhidas três mulheres europeias e dois homens asiáticos.

2. Seja X a v.a. que representa o lucro (biliões) que a produtora obterá com um grande épico e seja Y uma v.a. que indica a qualidade dos filmes, de acordo com determinados critérios. Sabe-se que $f(x,y) = \frac{1}{240}\left(k_1 x + k_2 y^2\right)$, $0 < x < 10$, $0 < y < 3$ e $E(X) = \frac{1}{240}\left(1000k_1 + 450k_2\right)$.

a) Sem recorrer ao cálculo integral, justifique que os pares de valores $k_1 = 1, k_2 = -1$ e $k_1 = 2, k_2 = 1$ não são admissíveis, face ao que se sabe. Verifique depois da forma habitual que $k_1 = k_2 = 1$ já é admissível.

b) Calcule a probabilidade de o épico vir a proporcionar um lucro inferior a 7 biliões, com uma qualidade superior a 2.5.

c) Use $f_1(x)$ e também a desigualdade de Chebychev para estudar o valor lógico da proposição $P\left(\frac{15}{4} < X < \frac{25}{3}\right) > 0.5$. Comente.

d) Certo equipamento usado nas filmagens tem que ser afinado regularmente. O tempo de afinação é uma v.a. com distribuição exponencial de média igual a três horas. O custo/hora da afinação é 1250. Há ainda um custo fixo de 15 000, por intervenção. Obtenha a f.d.p. da v.a que representa o custo com cada afinação do equipamento e escreva a expressão da correspondente f.g.m..

e) No corrente ano as principais produtoras mundiais lançarão 30 filmes em que a distribuição do lucro se admite ser idêntica a $f_1(x)$. Qual a probabilidade aproximada de o lucro total obtido estar entre 150 e 225 biliões?

3. No mundo do cinema há três v.a. muito importantes, sejam X_1, X_2 e U.

a) Se $X_1 \sim \chi^2_{(10)}$, $X_2 \sim \chi^2_{(r)}$, X_1 e X_2 são independentes, $U = \frac{r}{10}\frac{X_1}{X_2}$ e $P(U > 2.35) = 0.05$, qual o valor de r?

b) Considerando dez observações i.i.d. da v.a. U, qual a probabilidade de mais de seis serem de valor superior ao terceiro quartil da respetiva distribuição?

4. No épico há uma cena dramática: herói e celerado, ambos atiradores exímios, vão disparando, alternadamente, ao acaso e sem repetição, sobre 20 grandes alvos, dispostos a curta distância. Ao serem atingidos, 17 dos alvos exibirão a inscrição “NO” e três exibirão a inscrição “YES”. Quem acertar no terceiro (e último) alvo com a inscrição “YES” tem poder de vida ou de morte sobre o outro. O facínora joga primeiro. Escreva a expressão de p_i, a probabilidade dele liquidar o assunto ao seu i-ésimo disparo, $i = 2,...,10$.

Cada uma das dez questões tem cotação 20.

Nota:
Se não resolveu 1.a) considere na resolução de 1.b) que as probabilidades $P\left(A_i \cap B\right)$ e $P\left(A_i \cap \bar{B}\right),\ i=1,2,3,4,$ são iguais a 1/8 (o que não é uma resposta correta para 1.a)).

Formulário

$$M(s) = (1-p) + pe^s$$

$$M(s) = \left((1-p) + pe^s\right)^n$$

$$M(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s},\quad s < -\ln(1-p)$$

$$M(s) = \left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^k,\quad s < -\ln(1-p)$$

$$M(s) = e^{\lambda\left(e^s-1\right)}$$

$$M(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

$$M(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - s}\right)^n,\quad s < \alpha$$

$$M(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$$

$$E[X \mid y] = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\left(y - \mu_Y\right);\ Var\left(X \mid y\right) = \sigma_X^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$E[Y \mid x] = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\left(x - \mu_X\right);\ Var\left(Y \mid x\right) = \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2};\ Var(X) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = \left(E[X]\right)^2\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Soluções

1.a)

$$0 \leq P\left(A_i \cap B\right) \leq \min\left\{P\left(A_i\right), P(B)\right\},\quad i = 1,2,3,4; \sum_{i=1}^{4} P\left(A_i \cap B\right) = 0.6$$

$$P\left(A_1 \cap B\right) = 0.30;\ P\left(A_2 \cap B\right) = 0.26;\ P\left(A_3 \cap B\right) = 0.03;\ P\left(A_4 \cap B\right) = 0.01;$$

$$P\left(A_1 \cap \bar{B}\right) = 0.13;\ P\left(A_2 \cap \bar{B}\right) = 0.10;\ P\left(A_3 \cap \bar{B}\right) = 0.12;\ P\left(A_4 \cap \bar{B}\right) = 0.05$$

1.b) 0.05843

2.a)

Com $k_1 = 1, k_2 = -1\ \exists(x,y), 0 < x < 10; 0 < y < 3 : f(x,y) < 0$

Com $k_1 = 2, k_2 = 1\ \ E(X) > 10$

2.b) 0.1616

2.c) 0.518, a proposição é verdadeira; > -0.38, nada se pode concluir de significativo (neste caso, a aproximação fornecida pela DC é inútil - mas só usa os dois primeiros momentos da distribuição)

2.d) $f(r) = \dfrac{e^{4 - \frac{r}{3750}}}{3750}$, $r > 15\,000$; $M_R(s) = \dfrac{e^{15000s}}{1 - 3750s}, s < \dfrac{1}{3750}$

2.e) 0.9815

3.a) 20

3.b) 0.0035

4. $p_i = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{17}{2i-4}}{\binom{20}{2i-2}} \dfrac{1}{22-2i} = \dfrac{(2i-2)(2i-3)}{2280}, \quad i = 2, \ldots, 10$

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa

PROBABILIDADES – LICENCIATURA EM MAEG

28 de janeiro de 2013 Exame Final – Época de Recurso Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Seja X a v.a. que representa a razão entre o dispêndio anual com idas ao cinema dos filhos e o dispêndio anual com idas ao cinema dos pais, numa família com dada tipologia, escolhida ao acaso de certa população. X tem f.d.p.

$$f(x)=\begin{cases} k, & 0<x<1 \\ \frac{k}{3}x, & 1<x<2 \end{cases}.$$

a) Verifique que $k=2/3$ e determine a função de distribuição da variável X.

b) Calcule $P(X\le 1.5 | X\ge 0.5)$, usando $F(x)$. Sem efetuar o cálculo, escreva a expressão que permite obter a mesma probabilidade, usando $f(x)$.

c) São inquiridas 40 famílias, que representam uma proporção insignificante do número de famílias com a tipologia em causa, no conjunto da população. Qual a probabilidade de em menos de metade dessas famílias os pais gastarem anualmente mais do que os filhos em idas as cinema?

2. Um instituto de apoio à cinematografia suportará em 2013 despesas anuais (em Milhões) representadas por uma v.a. X_1 e espera obter receitas anuais (também em M) representadas por uma v.a. X_2, tais que a distribuição conjunta das duas variáveis é dada por

$$f(x_1,x_2)=\frac{2}{9}x_1, \qquad 4<x_1<5; \qquad 4<x_2<5$$

a) Verifique que $X_2 \sim U(4,5)$.

b) O instituto começou 2013 com um saldo positivo de 0.2M e os responsáveis não querem que o exercício seguinte comece com um saldo negativo. Qual a probabilidade desse objetivo ser alcançado?

c) Seja A o acontecimento que se realiza quando a despesa é superior a 4.9M, B o acontecimento que se realiza quando a despesa é superior a 4.5M e C o acontecimento que se realiza quando a receita é exatamente igual a 4.2M. Calcule $P\left[\left(\bar{A}\cap B\right)\cup C\right]$.

d) Em maio, a instituição vai lançar uma campanha para a obtenção extraordinária de patrocínios num montante c. Interprete o significado da equação seguinte e verifique que a solução é $c\approx 0.5M$.

$$\iint_D f(x_1,x_2)dx_1dx_2=0.05, \qquad D=\{(x_1,x_2): f(x_1,x_2)>0 \wedge x_1>x_2+0.2+c\}.$$

3. Todos os dias, entre as 21:15 e as 21:30, os cinéfilos chegam à bilheteira de uma sala de cinema (que só passa filmes alternativos) segundo um processo aproximado de Poisson com taxa média de 2 por minuto.

a) Qual a probabilidade de chegarem menos de 8 espetadores, entre as 21:15 e as 21:20, num qualquer dia?

b) A sala fica numa zona boémia, extremamente movimentada. No período em causa, 1 em cada 6 pessoas que passam pela porta da sala de cinema dirige-se à bilheteira. Qual a probabilidade de, num qualquer dia, o décimo transeunte ser a segunda pessoa a ir à bilheteira?

4. Sejam U e V v.a. independentes, muito frequentemente observadas na fantástica e deslumbrante galáxia das estrelas de cinema. $U \sim N(\mu, 2^2)$ e $V \sim G(4,1)$. Partindo de dois modelos probabilísticos alternativos, calcule o valor de m que verifica a igualdade

$$P\left(|U-\mu| < m\sqrt{V}\right) = 0.99.$$

Cada uma das dez questões tem cotação 20.

Soluções:

1-a) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{3}x, & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{9}(x^2+5), & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$

1-b) $P(X \le 1.5 | X \ge 0.5) = 0.708 = \frac{\int_{0.5}^{1}\frac{2}{3}dx + \int_{1}^{1.5}\frac{1}{9}x dx}{\int_{0.5}^{1}\frac{2}{3}dx + \int_{1}^{2}\frac{1}{9}x dx}$

1-c) ≈ 0.0125

2-b) 0.697
2-c) 0.4
2-d) A equação permite calcular o montante de patrocínios tal que a probabilidade do exercício de 2013 terminar com um saldo negativo é igual a 0.05

3-a) 0.2205
3-b) 0.058

4. k =3.36, recorrendo à distribuição t-Student e à distribuição F-Snedcor

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa

PROBABILIDADES – LICENCIATURA EM MAEG

17 de janeiro de 2014 Exame Final – Época Normal duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Desde tempos imemoriais que as gentes do concelho de Peniche fazem da faina piscatória a sua principal atividade económica. Com o início do outono surgem nas noites escuras de novilúnio as fanecas e os safios. Em cada saída noturna as quantidades capturadas das duas espécies por certa equipagem, em toneladas, são duas v.a., X (fanecas) e Y (safios), tais que

$$f(x,y)=k(2+x),\ 0<x<2,\ 1<y<2;\quad f_1(x)=\frac{1}{6}(2+x),\ 0<x<2;\quad M_Y(s)=\begin{cases}\dfrac{e^{2s}-e^{s}}{s}, & s\neq 0\\ 1, & s=0\end{cases}$$

   a) Estude se X e Y são v.a. independentes.
   b) O acontecimento A realiza-se quando a captura de faneca não excede 1000 kg e o acontecimento B realiza-se quando a captura de safio é inferior à captura de faneca. Sabendo que A, B e C formam partição do espaço dos resultados da pescaria, defina o acontecimento C e calcule a sua probabilidade.
   c) Calcule a probabilidade de a décima segunda noite de faina ser a quarta noite em que a quantidade capturada de safio excede uma tonelada e meia.
   d) Por cada saída, o proprietário do barco recebe um montante Z, que é dado pela seguinte função de X:

$$Z=\begin{cases}X, & 0<X<1\\ 1, & 1\leq X\leq 1.5\\ 2X/3, & X>1.5\end{cases}$$

   Escreva o ramo da função de distribuição da v.a. Z, para $1\leq z<4/3$.

2. Pela primavera começam a aparecer as primeiras douradas. A partir desta altura, e até setembro, um pescador solitário sai diariamente de madrugada para um lugar a que só ele sabe aceder e apanha X_1 caixas de douradas e X_2 caixas de sargos legítimos, de especial qualidade. X_1 e X_2 são v.a. com a função de probabilidade conjunta da tabela abaixo.

X_2 \ X_1	0	1	2
0	0.05	0.05	0.10
1	0.10	0.20	0.15
2	0.05	0.10	0.05
3	0.10	0.05	0

   a) O pescador vende cada caixa de dourada por 4 e cada caixa de sargo por 6. Calcule a média e o desvio padrão da receita diária, sabendo ainda que $Var(X_1)=0.6$ e $Var(X_2)=0.91$.
   b) Na época alta o pescador tem um contrato exclusivo com os donos de um pequeno hotel que lhe pagam 8 por cada caixa de sargo, mas cuja procura diária é uma v.a. X_3 nula com probabilidade 0.1, igual a uma caixa com probabilidade 0.2 e igual a duas ou três caixas com probabilidades que são iguais entre si. X_2 e X_3 são v.a. independentes. Por cada caixa de sargo que lhe sobra o pescador tem um custo de 3 e por cada caixa procurada e que ele não conseguiu pescar tem também um custo de 3. Determine o ganho esperado do pescador, nos dias em que pesca duas caixas.
   c) No ano passado, o pescador saiu 120 dias para pescar douradas e sargos. Capturou um total de 407 caixas. Recorra ao Teorema do Limite Central para estudar se aquele número está abaixo do percentil 95 da distribuição (aproximada) da pesca total.

vsff

3. No final do verão os robalos encostam em grande quantidade e tamanho. São capturados exemplares gigantescos, que chegam a ultrapassar os sete kg. Consta que há noites em que quase todos os pescadores vão satisfeitos para casa. A v.a. que representa o número de robalos com mais de sete kg que são pescados em certa enseada no período entre a uma da manhã e as seis da manhã tem distribuição de Poisson à média de um por hora.
   a) Calcule a probabilidade de se pescarem dois robalos gigantescos até às duas da manhã e outros dois depois disso, no período em causa.
   b) Seja T a v.a. que representa o tempo, em horas, até serem pescados três robalos com mais de sete Kg. Identifique a distribuição de T e calcule a probabilidade de serem pescados três desses espécimenes antes de decorridas 1.75 horas, a partir da uma da manhã.

4. O mergulho com garrafa é muito apreciado nas Berlengas, que pertencem ao concelho. Sejam U e V v.a. que representam o número de praticantes, em centenas, respetivamente em julho e agosto. A função de probabilidade conjunta que se conseguiu ajustar é

$$f(u,v)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{u-1}e^{-1}(1-e^{-1})^{v-1}, u=1,2,3,\dots.; v=1,2,3,\dots$$

Determine a distribuição condicionada $f(v|U=u)$ e escreva a expressão da correspondente f.g.m..

Cada uma das dez questões tem cotação 20.

Formulário

$E[E[X|Y]]=E[X];\quad E\big[E[Y|X]\big]=E[Y]$

$Var(X)=Var(E[X|Y])+E[Var(X|Y)];\quad Var(Y)=Var(E[Y|X])+E[Var(Y|X)]$

$M(s)=(1-p)+pe^s;\ M(s)=\left((1-p)+pe^s\right)^n;\ M(s)=\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s},\ s<-\ln(1-p)$

$M(s)=\left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^k,\ s<-\ln(1-p);\qquad M(s)=e^{\lambda\left(e^s-1\right)}$

$M(s)=\begin{cases}\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}, & s\neq 0\\ 1, & s=0\end{cases};\qquad M(s)=\left(\frac{\alpha}{\alpha-s}\right)^n,\ s<\alpha;\quad M(s)=e^{\mu s+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$

$E[X\mid y]=\mu_X+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y);\ Var(X\mid y)=\sigma_X^2\left(1-\rho^2\right)$

$E[Y\mid x]=\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X);\ Var(Y\mid x)=\sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)$

$E[X]=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2};\ Var(X)=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}=\left(E[X]\right)^2\left(e^{\sigma^2}-1\right)$

Soluções:

1-a) são independentes; b) 5/18; c) 0.0403; d) $F(z)=(1/6)(3z+9z^2/8), 1\leq z<4/3$

2-a) 11.8 e 5.51; b)10.55; c) $\xi_{0.95}=294$

3-a) 0.0269; b) $\cong 0.25$

4- $M_{V|U=u}(s)=\frac{e^s}{e-(e-1)e^s},\ s<1-\ln(e-1)$

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa

PROBABILIDADES – LICENCIATURA EM MAEG

29 de janeiro de 2014 Exame Final – Época de Recurso duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. A indústria conserveira de Peniche, que segundo dados recolhidos pela Arqueologia parece remontar à época romana, conheceu a certa altura um grande incremento, traduzido na laboração de perto de uma vintena de fábricas especializadas na transformação e conservação de sardinha. Na atividade de uma dessas fábricas, os *inputs* mensais de sardinha (toneladas) e de azeite (hl) são duas v.a., X e Y, com distribuição normal bidimensional, tal que

$$E[X]=7,\quad E[Y]=9,\ Var[X]=0.8,\quad Var[Y]=0.8 \ \text{ e } \ E[XY]=63.78.$$

a) A dada altura de um dado mês já haviam sido processadas 8 toneladas de sardinha. Qual a probabilidade de não serem ainda usadas mais de 3 toneladas até ao final desse mês?

b) Escreva a curva de regressão (tipo I) de X sobre Y. Nos meses em que o consumo de azeite é pelo menos de 600 l, quanto se poderá esperar processar de sardinha, no mínimo?

c) Para fins de controlo, aos meses em que o consumo de sardinha é inferior a 7 toneladas é atribuído o código 0; aos meses em que está entre 7 e 10 toneladas é atribuído o código 1; aos restantes meses é atribuído o código 2. Escreva a f.g.m. da v.a. que representa o referido código.

d) Calcule a probabilidade de o consumo mensal de azeite se situar entre 8 hl e 10.2 hl. Compare o resultado obtido com o limite inferior dado pela desigualdade de Chebichev, calculado usando um intervalo conveniente centrado na média. Comente.

e) Na fábrica também se consome óleo vegetal, segundo um processo de Poisson com uma taxa média de 3 bidões por dia. Calcule o *stock* de segurança, estabelecido como o número mínimo de bidões que cobrem as necessidades de cinco dias, com probabilidade 0.9.

2. O patrão de um barco quer contratar um novo grumete. Na primeira fase de seleção, os candidatos têm 15 minutos para responder a dez perguntas de escolha múltipla, sendo propostas quatro respostas alternativas, das quais só uma é correta. A cada resposta certa corresponde um ponto, a cada resposta errada corresponde uma penalização de s pontos.

a) Seja U a v.a. que representa o número de respostas certas de um candidato que responde às dez questões completamente ao acaso e seja V a v.a. que representa a correspondente pontuação. Sem obter a f.p. de V, use a relação existente entre as duas variáveis para mostrar que o valor da penalização deve ser $s=\frac{1}{3}$, se se pretende que $E[V]=0$.

b) Considerando $s=\frac{1}{3}$, deduza que a função de probabilidade de V é

$$f(v)=\binom{10}{\frac{3}{4}v+\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}v+\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-\left(\frac{3}{4}v+\frac{5}{2}\right)},\qquad v=-\frac{10}{3},-\frac{6}{3},-\frac{2}{3},\ldots,\frac{26}{3},10.$$

c) Dos 16 candidatos que se apresentaram, cinco foram eliminados. Mesmo assim, foram todos convidados a participar na animada prova seguinte, a pesca à raia, feita em duas embarcações. Sortearam-se oito nomes para fazer parte da equipagem da primeira embarcação. Qual a probabilidade de os cinco que foram eliminados terem sido todos sorteados para esta tripulação?

vsff

d) Ficaram finalmente dois candidatos (A e B), antes da última prova, a prova de resistência em natação. Seja (X_1, X_2) um vetor aleatório bidimensional, onde X_1 representa o tempo, em horas, que A demora a nadar a distância estabelecida e X_2 representa o tempo, também em horas, gasto por B a nadar a mesma distância. A f.d.p. conjunta é

$$f(x_1, x_2) = e^{2-(x_1+x_2)}, \qquad x_1 > 1, x_2 > 1.$$

Obtenha a f.d.p. do tempo despendido por A a percorrer a distância, condicionado pelo tempo gasto por B, e use o resultado para estudar a independência entre as duas variáveis.

3. Nos dias soalheiros de inverno, os passeios a pé pelo litoral do concelho proporcionam paisagens arrebatadoras, onde as falésias escarpadas fustigadas pelos mares entremeiam com os areais extensos e as pinceladas de verde dos pinheirais.
Um casal de séniores dá por semana N desses passeios, sendo N uma v.a. tal que $P(N = 0) = 0.05$, $P(N = 1) = 0.30$ **e** $P(N > 1) = 0.65$. **Q**uando $N = 1$, os passeios têm duração com distribuição exponencial de média 3 horas; quando $N > 1$, os passeios têm duração com distribuição exponencial de média 2 horas.
Calcule a probabilidade de um qualquer passeio durar entre uma hora e três horas.

Cada uma das dez questões tem cotação 20.

Formulário

$E[E[X|Y]] = E[X]; \quad E[E[Y|X]] = E[Y]$

$Var(X) = Var(E[X|Y]) + E[Var(X|Y)]; \quad Var(Y) = Var(E[Y|X]) + E[Var(Y|X)]$

$M(s) = (1-p) + pe^s; \; M(s) = ((1-p) + pe^s)^n; \; M(s) = \dfrac{pe^s}{1-(1-p)e^s}, \; s < -\ln(1-p)$

$M(s) = \left(\dfrac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^k, \; s < -\ln(1-p); \qquad M(s) = e^{\lambda(e^s-1)}$

$M(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}; \qquad M(s) = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha - s}\right)^n, \; s < \alpha; \quad M(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$

$E[X \mid y] = \mu_X + \rho \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y); \; Var(X \mid y) = \sigma_X^2(1-\rho^2)$

$E[Y \mid x] = \mu_Y + \rho \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X); \; Var(Y \mid x) = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$

$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; \; Var(X) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = (E[X])^2(e^{\sigma^2} - 1)$

Soluções:

1-a) $\cong 1$; b) $\mathrm{E}[X! \, Y = y] = 0.975y - 1.775$ e 4.075; c) $M_X(s) = 0.5 + 0.4995e^s + 0.0004e^{2s}$;
d) 0.7785 e 0.2 (aproximação fraca); e) 20
2-a) $V = U - s(10 - U), U \sim Bi\left(10, \frac{1}{4}\right)$; c) 0.0128; d) $f(x_1|x_2) = f(x_1) = e^{1-x_1}, x_1 > 1$,
$(x_2 \text{ fixo}, x_2 > 1)$
3- 0.3724

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa

PROBABILIDADES

16 de janeiro de 2015 Exame Final – Época Normal Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS

1. Um peregrino russo decidiu fazer o Caminho Português de S. Tiago em apenas três etapas, percorridas a pé. Tendo participado em inúmeros fóruns sobre o tema, e atendendo à extensão e outras especificidades de cada uma das tiradas, e às suas características pessoais, recorreu aos métodos estatísticos apropriados e conseguiu ajustar que as durações respetivas, em horas, são v.a. X_1, X_2 e X_3, mutuamente independentes, tais que:

$$f(x_1)=\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x_1},\ \ x_1>0;\quad F(x_2)=x_2-9.5,\quad 9.5\le x_2<10.5;\qquad M_{X_3}(s)=e^{10s+\frac{s^2}{8}}.$$

   a) Identifique as três distribuições em causa e escreva a fdp conjunta do vetor aleatório (X_1, X_2, X_3), o vetor das médias e a matriz das variâncias e covariâncias.
   b) Interprete e calcule $P\left((9\le X_2\le 11 \wedge X_3\le 10)\,\middle|\,X_1\ge 10\right)$.
   c) O peregrino estimou que o consumo de calorias (em centenas) atribuível às caminhadas é a v.a. $C=3.4X_1+3.7X_2+3.3X_3$. Calcule $\mathrm{E}[C]$ e $\mathrm{Var}(C)$ e use a Desigualdade de Chebychev, com um intervalo adequado centrado na média, para calcular um limite inferior para a probabilidade de o dispêndio total de calorias estar entre 10000 e 11000.
   d) Na semana da peregrinação, 43 caminhantes irão fazer exatamente a segunda etapa estabelecida pelo peregrino russo. Admitindo que os tempos que demoram a calcorrear o percurso são v.a. iid a X_2, calcule a probabilidade aproximada de os 43 peregrinos, no seu conjunto, despenderem mais de 435 horas com a caminhada.

2. Seja X a v.a. que representa o peso da mochila do peregrino russo, no início de uma qualquer jornada, e seja Y a v.a. que representa o peso da mochila do amigo polaco que o acompanha (os pesos em dezenas de kg).
   A densidade de probabilidade conjunta é $f(x,y)=k,\ \ 2<x<3,\ \ x-1<y<3.$
   a) Verifique que $k=2/3$ e calcule a probabilidade do amigo polaco começar o dia com pelo menos mais 5 kg na mochila do que o peregrino russo.
   b) Obtenha $f(y\,|\,x=2.1)$ e formule uma questão cuja resposta seja obtida recorrendo a esta distribuição condicionada.

3. Num dos albergues que acolhem os peregrinos há normas rígidas, relativamente às horas de entrada e de saída. Em cada mês (30 dias) o número de dias em que chegam peregrinos depois de cerrada a porta é uma v.a. Y_1 com distribuição de Poisson de média 11 e o número de dias em que, apesar dos avisos insistentes, alguém acaba por sair depois da hora determinada é uma v.a. Y_2 com distribuição binomial de parâmetro $p=0.6$.

   a) Qual a probabilidade de, num qualquer mês, haver mais de dez dias em que chegam peregrinos depois de a porta do albergue ter sido fechada?
   Nota: Considere $P(Y_1=30)\cong P(Y_1\ge 30)$.
   b) Qual a probabilidade de, em menos de metade dos meses de um qualquer ano, haver no máximo 14 indivíduos que saem depois da hora estabelecida?
   c) Calcule $Cov(Y_1,Y_2)$, sabendo que $\rho_{Y_1,Y_2}=0.8.$ Comente, tendo em atenção o enunciado.

4. Diz-se que a v.a. X do tipo contínuo tem distribuição logarítmica no intervalo $\left(e, e^2\right)$ quando a sua fdp é

$$f(x) = \frac{\ln x}{e^2}, \quad e < x < e^2.$$

Verifique que $f(x)$ satisfaz as propriedades P1 e P2 das fdp.

Cotações: Cada alínea tem cotação 20.

Formulário

$$M(s) = (1-p) + pe^s$$

$$M(s) = \left((1-p) + pe^s\right)^n$$

$$M(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}, \quad s < -\ln(1-p)$$

$$M(s) = \left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^k, \quad s < -\ln(1-p)$$

$$M(s) = e^{\lambda\left(e^s - 1\right)}$$

$$M(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

$$M(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - s}\right)^n, \quad s < \alpha$$

$$M(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$$

$$E[X \mid y] = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y); \; Var(X \mid y) = \sigma_X^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$E[Y \mid x] = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X); \; Var(Y \mid x) = \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; \; Var(X) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = \left(E[X]\right)^2\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Soluções

1-a) $X_1 \sim G(1{,}1/10)$; $X_2 \sim U(9.5{,}10.5)$; $X_3 \sim N(10{,}1/4)$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\left(10x_1 + (x_3 - 10)^2\right)}, \quad x_1 > 0, \quad 9.5 < x_2 < 10.5$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}^{;T} ; \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

1-b) … 0.5

1-c) 10.4; 1161; a DC não em utilidade prática, neste caso (limite: - 71.56)

1-d) Aproximadamente 0.0041

2-a) 1/12

2-b) $f(y \mid x = 2.1) = \dfrac{10}{19}, \quad 1.1 < y < 3$

Ex: Num dia em que a mochila do PR pesa 21kg, qual a probabilidade da mochila do AP pesar mais do que isso?

3-a) 0.5401

3-b) Aproximadamente 1

3-c) 7.12; há gente que não respeita horários, nem à chegada nem à partida…

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa

PROBABILIDADES

28 de janeiro de 2015 Exame Final – Época de Recurso Duração: 2h

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS

1. O par aleatório (X,Y) tem fdp conjunta $f(x,y)=\frac{2}{45}\left(1-\frac{x}{10}\right)y,\ 0<x<10;\ 0<y<3.$

   A v.a. X representa o montante gasto em compras por uma qualquer passageira de um cruzeiro pelo Báltico e a v.a. Y representa o montante gasto em compras por um qualquer passageiro do mesmo cruzeiro.

   a) Estude se as v.a. X e Y são independentes.

   b) Calculando um único integral, complete a tabela seguinte, que indica as probabilidades das interseções dos acontecimentos referidos nas linhas e nas colunas. Entre parêntesis apresentam-se os seus significados em termos das v.a. X e Y.

	$A_1\ (X\le 2)$	$A_2\ (2<X<5)$	$A_3\ (X\ge 5)$	Total
$B_1\ (Y<1)$			0.028	0.11
$B_2\ (Y\ge 1)$			0.222	
Total	0.36			1

   c) Interprete e calcule $P\left(\left(A_2\cup A_3\right)\cap\overline{B}_1\right)$.

   d) Calcule a fgm.de $Z=\begin{cases}1, & X\le 2\\ 2, & 2<X<5\\ 3 & X\ge 5\end{cases}$ e use-a para calcular $Var(2Z-1)$.

   e) O domínio de $f_1(x)$ vai ser restringido ao intervalo $]\xi_{0.05},\xi_{0.95}[$. Calcule-o e proceda ao conveniente ajustamento na constante multiplicativa desta fdp.

2. Há no paquete um grupo de cinco veneráveis senhoras que julgam estar no *Love Boat.* Todas as noites se realizam *soirées* dançantes, entre as 21 e a meia-noite. O número de senhoras do grupo que vão à *soirée*, numa noite escolhida ao acaso, é uma v.a. X_1 com fp

x_1	0	1	2	3	4	5
$f(x_1)$	0.05	0.05	0.15	0.15	0.25	0.35

   Os cavalheiros que elas consideram elegíveis vão fazendo a sua aparição no baile a partir das 21 horas, à média de dois por hora, de acordo com um processo aproximado de Poisson. Represente-se o número de cavalheiros que vão à *soirée* nessa noite escolhida ao acaso por Y_1. Pode considerar-se que as v.a. X_1 e Y_1 são independentes.

   b) Calcule $P(3<X_1+Y_1\le 5\,|\,Y_1\le 2)$.

   c) Obtenha uma função de distribuição condicionada, à sua escolha, e enuncie duas propriedades das funções de distribuição.

   d) Qual a probabilidade de a oitava noite de baile ser a terceira noite em que às vinte e duas horas já tinham chegado ao salão três cavalheiros elegíveis?

e) O cruzeiro em questão realiza-se 35 vezes por estação, sempre com pessoas diferentes. De todas as vezes, porque a natureza humana é o que é, se consegue encontrar um grupo de senhoras e um grupo de cavalheiros em tudo muito idênticos aos descritos. Calcule a probabilidade aproximada de, no conjunto das 35 viagens, e escolhendo uma noite ao acaso em cada uma delas, o número de senhoras nos bailes exceder metade do número esperado de cavalheiros.

3. Resolva **apenas uma** das duas questões seguintes:

3.1 Dado que $X_1 \sim N(2,1)$, $X_2 \sim \chi^2_{(5)}$, $X_3 = \dfrac{X_1 - 2}{\sqrt{X_2/5}}$ e $X_4 = (X_3)^2$, X_1 e X_2 independentes, calcule: $P(|X_1| \le 1)$; $a: P(X_2 \le a) = 0.95$; $P(X_3 > 3.365)$; $P(6.61 < X_4 < 16.26)$.

3.2 Obtenha a distribuição de $Y = \ln X - \ln(X-1)$, sabendo que $X \sim U(2,3)$.

Cotações: Cada uma das alíneas tem cotação 20, que é também a cotação da questão 3.

Formulário

$$M(s) = (1-p) + pe^s$$

$$M(s) = \left((1-p) + pe^s\right)^n$$

$$M(s) = \frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}, \quad s < -\ln(1-p)$$

$$M(s) = \left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^k, \quad s < -\ln(1-p)$$

$$M(s) = e^{\lambda\left(e^s - 1\right)}$$

$$M(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

$$M(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - s}\right)^n, \quad s < \alpha$$

$$M(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$$

$$E[X \mid y] = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y); \; Var(X \mid y) = \sigma_X^2 \left(1 - \rho^2\right)$$

$$E[Y \mid x] = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X); \; Var(Y \mid x) = \sigma_Y^2 \left(1 - \rho^2\right)$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; \; Var(X) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = \left(E[X]\right)^2 \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Soluções

1-a) São independentes

1-b) Basta calcular uma das quatro probabilidades omissas, por exemplo, $P(A_1 \cap B_1)(=0.04)$

1-c) 0.57…

1-d) 0.5979; 2.3916

1-e) ‘Nova’ fdp: $f^n(x)=\frac{2}{9}\left(1-\frac{x}{10}\right),\ \ 10-\sqrt{95}<x<10-\sqrt{5}$

2-a) 0.336

2-b) as distribuições condicionadas coincidem com as distribuições marginais

2-c) 0.0456

2-d) 0.9868

3.1 0.1574; 11.0705; 0.01; 0.04

3.2 $f(y)=\frac{e^y}{\left(e^y-1\right)^2}\left(1-\frac{x}{10}\right),\ \ \ln 1.5<y<\ln 2$

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa

Exame Final de PROBABILIDADES - Época Normal - 19 de janeiro de 2016

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.

1. Um antiquário abre a sua loja todos os dias, entre as nove e as 19, exceto quando tem que se deslocar às feiras e leilões onde adquire as peças que vende, o que acontece em média uma vez em cada cinco dias. Nesses dias, a loja não abre. É sabido que, em média, de duas em duas horas aparece um cliente, esteja a loja aberta ou fechada, e que os movimentos em dias diferentes, ainda que idênticos, são mutuamente independentes.
   Seja X uma v.a. que assume o valor 0, se num qualquer dia a loja está fechada, e assume o valor 1, no caso contrário. Seja Y a v.a. que representa o número de clientes que vão à loja num qualquer dia (dez horas de funcionamento). A função de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y) é

$$f(x,y)=\left(\frac{4}{5}\right)^{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}\left(\frac{e^{-5}5^{y}}{y!}\right),\ x=0,1 \quad ; \ y=0,1,2,\ldots,$$

   a) A partir das respetivas funções de probabilidade marginais, identifique os modelos teóricos correspondentes às distribuições de X e Y e verifique que as duas v.a. são independentes.
   b) O acontecimento A realiza-se quando, num dia escolhido ao acaso, a loja está fechada e aparecem mais de doze clientes. O acontecimento B realiza-se quando, num dia escolhido ao acaso, a loja está aberta e não vem cliente algum. Qual destes dois acontecimentos é mais provável?
   c) Qual a probabilidade de a loja fechar quatro dias, num intervalo de 15 dias? Compare, comentando, com a probabilidade de esses quatro dias serem exatamente os últimos quatro dias do intervalo em causa.
   d) Calcule a probabilidade de, num qualquer dia, não chegar nenhum cliente até às 14 e chegarem mais de três clientes, daí em diante. Calcule a partir da distribuição da v.a. Y e depois formalize a resposta (sem efetuar o cálculo), recorrendo à distribuição dos tempos de espera.
   e) Calcule um valor aproximado de $P\left(\sum_{i=1}^{365} X_i Y_i > 1500\right)$ e interprete o seu significado.

   [Note: X e Y independentes $\Rightarrow Var(XY)=Var(X)Var(Y)+Var(X)\left(\mathrm{E}[Y]\right)^2+Var(Y)\left(\mathrm{E}[X]\right)^2$]

2. Nos dias em que a loja está aberta, o tempo que o antiquário passa a atender os clientes é uma v.a. U e o tempo que gasta a falar ao telefone (para não se entediar, a maior parte das vezes) é uma v.a. V, ambas expressas em horas. Sabe-se que

$$f(u,v)=k(u+v),\ 0<u<5;\ 1<v<2,\ \mathrm{E}[U]=3.021,\ Var(V)=0.083 \text{ e } \rho_{UV}=-0.028.$$

   a) Verifique que $k=\dfrac{1}{20}$.
   b) Calcule a probabilidade de o senhor passar mais tempo a falar ao telefone do que a atender a clientela, num qualquer desses dias.
   c) Por cada dia que passa na loja, o probo antiquário paga-se $M=16U-4V+6(10-U-V)$. Calcule a média e o desvio padrão do montante M.

d) De forma rigorosa e completa, indique os passos para obter a f.d.p. da v.a. *M*, a partir de $f(u,v)$.

3. Das duas questões seguintes <u>resolva apenas uma</u>:

3.1 Sabendo que $\frac{X}{a^2} \sim \chi^2_{(8)}, \quad a \neq 0,$ obtenha a f.g.m. da v.a. *X*, identifique a distribuição em causa e calcule o primeiro quartil da distribuição da v.a. $Y = 4X$.

3.2 Enuncie e demonstre o Teorema de Bernoulli.

Cotações: cada uma das alíneas e a questão 3 estão igualmente cotadas em 20.

Formulário

$$M(s) = \left((1-p) + pe^s\right)^n$$

$$M(s) = \left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^k, \quad s < -\ln(1-p)$$

$$M(s) = e^{\lambda\left(e^s - 1\right)}$$

$$M(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{bs} - e^{as}}{(b-a)s}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

$$M(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$$

$$M(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - s}\right)^n, \quad s < \alpha$$

$$Var(X) = Var\left(\mathrm{E}[X \mid Y]\right) + \mathrm{E}\left(Var[X \mid Y]\right); \; Var(Y) = Var\left(\mathrm{E}[Y \mid X]\right) + \mathrm{E}\left(Var[Y \mid X]\right)$$

$$E[X \mid y] = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y); \; Var(X \mid y) = \sigma_X^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$E[Y \mid x] = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X); \; Var(Y \mid x) = \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; \; Var(X) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = \left(E[X]\right)^2\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Soluções:

1-a) X tem distribuição de Bernoulli de parâmetro 4/5; Y tem distribuição de Poisson parâmetro 5. As duas v.a. são independentes.

1-b) $P(A) = 0.0004$; $P(B) = 0.00536$.

1-c) 0.1876 e 0.0001374.

1-d) 0.02 e $P\left(G(1,2.5) > 1 \wedge G(4,2.5) < 1\right) = P\left(G(1,2.5) > 1\right) \times P\left(G(4,2.5) < 1\right)$.

1-e) 0.2296; probabilidade de, ao longo de um ano, serem atendidos mais de 1500 clientes.

2-b) 0.175.
2-c) 75 e 13.841.
2-d) …

3.1 $M_X(s) = \left(\dfrac{\frac{1}{2a^2}}{\frac{1}{2a^2} - s} \right)^4 \Leftrightarrow X \sim G\left(4, \dfrac{1}{2a^2}\right)$; $\xi_{0.25} = 20.28256a^2$.

3.2 …

Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa

Exame Final de PROBABILIDADES - Época de Recurso - 3 de fevereiro de 2016

<u>JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS. APRESENTE TODOS OS CÁLCULOS.</u>

1. O antiquário tem uma irmã alfarrabista, que vende em loja e *online*. Num qualquer mês, a v.a. X representa o valor (mensal) das vendas na loja e a v.a. Y representa o valor (mensal) das vendas realizadas *online*. O vetor aleatório (X,Y) tem f.d.p. conjunta

$$f(x,y)=k\left(y-y^2\right);1<x<k;\ 0<y<1.$$

a) Verifique que o valor <u>total</u> das vendas da alfarrabista, num mês escolhido ao acaso, pertence ao intervalo $]1,4[$.

b) Calcule e interprete $P\left[Y<\frac{X}{3}\,|\,Y>\frac{X}{4}\right]$. [Se não resolveu a), considere $k=3$.]

c) Determine $f_1(x)$ e calcule a média, a mediana e a moda desta distribuição. Conclua sobre a simetria.

d) Escreva a expressão da f.d.p. da v.a. que representa o valor <u>total</u> das vendas da alfarrabista, num mês escolhido ao acaso, <u>sem calcular os integrais que indicar</u>.

2. Cada venda *online* envolve a realização de sete tarefas independentes, a cada uma das quais está atribuído um tempo de execução aleatório com distribuição exponencial de média igual a dez minutos. O empregado da alfarrabista, que se considera uma patroa indulgente, está avisado de que não deve demorar mais do que 85 minutos a processar cada venda.

a) Verifique que a probabilidade de o empregado não exceder o limite estabelecido, no processamento de uma qualquer venda *online*, é ≈ 0.75.

b) Admita agora que o tempo de execução de cada tarefa tem distribuição normal com média também igual a dez minutos. Determine o desvio padrão da distribuição, de modo que a probabilidade de o empregado não exceder o limite estabelecido não se altere. Comente.

c) Considerando 16 encomendas *online*, e recorrendo a um dos modelos teóricos estudados, calcule a probabilidade de a décima sexta encomenda ser a décima terceira que é processada em não mais de 85 minutos.

3. Numa qualquer hora, a v.a. X_1 representa o número de vendas da alfarrabista que são efetuadas na loja e a v.a. Y_1 representa o o número de vendas feitas *online*. O vetor aleatório (X_1,Y_1) tem f.p. conjunta

$$f(x_1,y_1)=\frac{1}{18}(y_1-x_1+2),\quad x_1\in\{0,1,2\},\ y_1\in\{0,1,2\}.$$

a) Obtenha $F_2(y_1)$ e $F(y_1\,|\,x_1=0)$ e conclua sobre a independência das v.a. X_1 e Y_1.

[Sugestão: comece por escrever $f(x_1,y_1)$ na forma tabular.]

b) Calcule $P\left[E\left[X_1+Y_1\right]-\sigma_{X+Y}\le X_1+Y_1\le E\left[X_1+Y_1\right]+\sigma_{X+Y}\right]$.

vsff

4. Das duas questões seguintes resolva apenas uma:

   4.1 Numa sucessão de provas de Bernoulli, seja X_2 a v.a. que representa o número da prova em que ocorre o terceiro sucesso e seja Y_2 o número da prova em que ocorre o quarto sucesso. Escreva as expressões das f.p. marginais e deduza a expressão da f.p. conjunta. Conclua sobre a independência.

   4.2 Enuncie e demonstre o resultado conhecido como 'Desigualdade de Markov'.

Cotações: cada uma das alíneas e a questão 4 estão igualmente cotadas em 20.

Formulário

$$M(s) = \left((1-p) + pe^s\right)^n$$

$$M(s) = \left(\frac{pe^s}{1-(1-p)e^s}\right)^k, \quad s < -\ln(1-p)$$

$$M(s) = e^{\lambda\left(e^s-1\right)}$$

$$M(s) = \begin{cases} \dfrac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}, & s \neq 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

$$M(s) = e^{\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}$$

$$M(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - s}\right)^n, \quad s < \alpha$$

$$Var(X) = Var\left(\mathrm{E}[X \mid Y]\right) + \mathrm{E}\left(Var[X \mid Y]\right); \; Var(Y) = Var\left(\mathrm{E}[Y \mid X]\right) + \mathrm{E}\left(Var[Y \mid X]\right)$$

$$E[X \mid y] = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y); \; Var(X \mid y) = \sigma_X^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$E[Y \mid x] = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X); \; Var(Y \mid x) = \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}; \; Var(X) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = \left(E[X]\right)^2\left(e^{\sigma^2}-1\right)$$

Soluções:

1-a) $k = 3 \Longrightarrow X + Y \in]1,4[, f(x,y) > 0$.

1-b) 0.204

1-c) 2; 2; qualquer $x \in]1,3[$; é simétrica, ainda que não seja unimodal, pois $\mu_3 = 0$ (aliás, todos os momentos centrais de ordem ímpar são nulos)

1-d) $f_1(u) = \begin{cases} \int_0^{u-1} 3(v - v^2)dv\,, & 1 < u < 2 \\ \int_0^1 3(v - v^2)dv, & 2 < u < 3 \\ \int_{u-3}^1 3(v - v^2)dv, & 3 < u < 4 \end{cases}$

2-b) 8.4…

2-c) 0.169.

3-a)

$F_2(y_1) = \begin{cases} 0, & y_1 < 0 \\ 1/6, & 0 \le y_1 < 1 \\ 1/2, & 1 \le y_1 < 2 \\ 1, & y_1 \ge 2 \end{cases}$; $\quad F(y_1 | x_1 = 0) = \begin{cases} 0, & y_1 < 0 \\ 2/9, & 0 \le y_1 < 1 \\ 5/9, & 1 \le y_1 < 2 \\ 1, & y_1 \ge 2 \end{cases}$

As v.a. não são independentes

3-b) 2/3; 0…

4.1 $X_2 \sim BN(3,p)$; $Y_2 \sim BN(4,p)$

$f(x_2, y_2) = \binom{x_2 - 1}{2} p^4 (1-p)^{y_2 - 4}, x_2 \in \{3,4,\dots\};\ y_2 \in \{4,5,\dots\};\ x_2 < y_2$

Não são independentes.