INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 7 de Junho de 2016

Duração: 2 horas

I

1. Considere o PVI $\begin{cases} xx'\cos t = \left(x^2 - 1\right)sent \\ x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$.

a) **(1,5)** Mostre que a equação não é exacta e determine um factor integrante.

b) **(2,5)** Utilize como factor integrante a função $\mu(t) = \cos t$ para resolver o PVI, e indique o intervalo máximo de existência de solução.

2. Seja a equação diferencial $x'' + \alpha x' + 8x = 0$.

a) **(1,0)** Sabendo que e^{2t} pertence a um sistema fundamental de soluções da equação, determine o valor do parâmetro real α.

b) **(3,0)** Determine a solução geral da equação $x'' - 6x' + 8x = \dfrac{e^{4t}}{1 + e^{4t}}$.

3. Considere o sistema de equações diferenciais não linear

$$\begin{cases} x' = -seny \\ y' = -x\cos y \end{cases}.$$

a) **(1,0)** Determine as soluções de equilíbrio do sistema.

b) **(1,5)** Estude a estabilidade das soluções de equilíbrio.

c) **(2,5)** Resolva o PVI $\begin{cases} X' = AX \\ X(1) = (-1,1) \end{cases}$ correspondente ao sistema linearizado $A = Df(0,-\pi)$, e $X(t) = (x(t), y(t))$.

II

A dimensão da população de uma pequena cidade no final de cada ano é proporcional à sua dimensão no início desse ano. A população teve um crescimento de 50000 habitantes no final de 1970 para 75000 no final de 1980.

a) **(2,0)** Escreva a equação com diferenças finitas que descreve a dinâmica do crescimento populacional desta pequena cidade, e apresente a sua solução geral.

b) **(1,5)** Qual será a dimensão da população no final do ano 2020? Utilize o resultado obtido na alínea anterior para responder à questão.

III

Considere a função complexa de variável complexa $f(z) = \dfrac{(1+2z)e^{3iz}}{z^2+4}$.

a) **(1,0)** Determine e classifique as singularidades da função.

b) **(1,0)** Calcule o resíduo de qualquer singularidade de *f* que pertença ao semi-plano $\{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$.

c) **(1,5)** A partir do resultado da alínea anterior, determine o valor do integral $\displaystyle\int_{|i-z|=4} \frac{(1+2z)e^{3iz}}{z^2+4}\,dz$, justificando convenientemente.

fim