



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 14 de Junho de 2017

Duração: 2 horas

I

1. Considere o PVI $\begin{cases} e^{-t}x^{-1} + e^x x' = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

- a) (1,5) Mostre que a equação não é exacta e determine um factor integrante.
- b) (2,5) Utilize como factor integrante a função $\mu(x) = x$ para resolver o PVI, e indique o intervalo máximo de existência de solução.

2. Atenda à seguinte

Definição: Chama-se equação diferencial de Clairaut, a uma equação diferencial da forma $x = tx' + f(x')$, onde $f(x')$ é uma função diferenciável na variável x' .

- a) (1,0) Mostre que se $f(x')$ é constante ou se $f(x') = a(t)x'$, com $a \in C^0(I \subset \mathfrak{R})$, então a equação é de variáveis separáveis.
- b) (1,5) Mostre que as soluções duas vezes diferenciáveis da equação satisfazem uma determinada equação de 2ª ordem, e conclua que existe uma família de soluções com gráficos rectilíneos.
- c) (2,0) Obtenha a solução geral da equação de Clairaut correspondente a tal família, e resolva a equação $x = tx' - 9(x')^2$.

3. Considere o sistema de equações diferenciais não linear

$$\begin{cases} x' = y - x^3 \\ y' = 1 - xy \end{cases}.$$

a) (2,0) Determine as soluções de equilíbrio do sistema e classifique-as quanto à estabilidade.

b) (2,5) Resolva o PVI $\begin{cases} X' = AX \\ X(1) = (-1,1) \end{cases}$ correspondente ao sistema linearizado

$$A = Df(1,1), \text{ e } X(t) = (x(t), y(t)).$$

II

Suponha que o preço de um produto após n anos, p_n , se relaciona com a oferta após n anos, s_n , através da igualdade $p_n = a - bs_n$, onde a e b são constantes positivas. Suponha ainda que o preço e a oferta são proporcionais em anos alternados, $kp_n = s_{n+1}$, $k > 0$.

a) (2,0) Mostre que p_n satisfaz uma equação com diferenças finitas, linear, de 1ª ordem, de coeficientes constantes e não homogênea. Apresente a solução geral dessa equação.

b) (1,5) Mostre que o preço tem tendência a estabilizar se $bk < 1$, isto é, p_n converge para um valor real quando $n \rightarrow +\infty$.

III

Considere a função complexa de variável complexa $f(z) = \frac{1}{z^2(z - (1+i))(z+1)}$.

a) (1,5) Determine e classifique as singularidades da função.

b) (2,0) Determine o valor do integral $\int_{|i-z|=2} f(z) dz$, justificando convenientemente.

fim