

**SOLUÇÕES**  
**ANÁLISE MATEMÁTICA IV**  
Licenciatura MAEG  
Época Normal – 14 de Junho de 2017

**I**

**1a)**  $\frac{e^{-t}x^{-1}}{M(t,x)} + \frac{e^x}{N(t,x)} x' = 0$ , a equação não é exacta porque  $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{-e^{-t}}{x^2} \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 0$ . Um

factor integrante é  $\mu(x) = |x|$ .

b) Solução do PVI é,  $e^{-t} + e^x(1-x) = 1$ .  $I = \mathfrak{R}$ .

**2a)** Se  $f(x') = C$ , com  $C$  constante, então  $x = tx' + C \Leftrightarrow x' = \frac{1}{t}(x - C)$  que é uma edo de

variáveis separáveis;

se  $f(x') = a(t)x'$  então  $x = tx' + a(t)x' \Leftrightarrow x' = \frac{1}{t + a(t)}x$  que é uma edo de variáveis

separáveis.

b) Seja  $\varphi(t)$  uma solução duas vezes diferenciável da equação, então após derivar uma vez a equação obtém-se  $\varphi''(t)(t + f'(\varphi(t))) = 0$  que é uma edo de 2ª ordem. Se  $\varphi''(t) = 0$ , então  $\varphi(t) = at + b$  com  $a, b \in \mathfrak{R}$  é uma família de soluções com gráficos rectilíneos.

c) Substituindo  $\varphi(t) = at + b$  com  $a, b \in \mathfrak{R}$  na equação de Clairaut, obtém-se  $b = f(a) \forall_{a \in \mathfrak{R}}$ , e daí a solução geral é  $x(t) = at + f(a)$  com  $a \in \mathfrak{R}$ .

Assim, a solução geral da equação  $x = tx' - 9(x')^2$  é  $x(t) = at - 9a^2$  com  $a \in \mathfrak{R}$ .

**3a)** Soluções de equilíbrio são as soluções do sistema  $\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ 1 - xy = 0 \end{cases}$ . Os pontos de equilíbrio são  $(1,1)$  e  $(-1,-1)$ .

$A = Df(x, y) = \begin{bmatrix} -3x^2 & 1 \\ -y & -x \end{bmatrix}$ . Relativamente ao equilíbrio  $(1,1)$ , tem-se

$|Df(1,1) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$  com multiplicidade 2. Como  $\text{Re } \lambda < 0$ , então o equilíbrio  $(1,1)$  é um escaudouro, assintoticamente estável. Relativamente ao equilíbrio  $(-1,-1)$ , tem-se  $|Df(-1,-1) - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{5}$ . Como  $\text{Re } \lambda_1 > 0$  e  $\text{Re } \lambda_2 < 0$ , então o equilíbrio  $(-1,-1)$  é um ponto de sela que é um ponto instável.

b) PVI  $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -x - y \\ x(1) = -1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ . Pelo TFSL a solução do PVI é dada por  $X(t) = e^{A(t-1)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Pela alínea anterior  $\lambda = -2$  com multiplicidade 2, assim a matriz semi-simples é

$S = \text{diag}\{-2\}$  e a matriz nilpotente é  $N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  de ordem 2.

A solução do PVI é  $X(t) = e^{-2(t-1)} \begin{bmatrix} 2t-3 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$ .

## II

a)  $p_{n+1} = a - bs_{n+1} \Leftrightarrow p_{n+1} + bkp_n = a$  que representa uma edf linear de 1ª ordem, de coeficientes constantes e não homogénea.

A solução geral escreve-se como soma da solução geral da edf homogénea associada com uma solução particular da equação não homogénea, ou seja,

$$p_n = C(-bk)^n + p_n^p, \text{ com } C \in \mathfrak{R}.$$

Pelo método do Polinómio Aniquilador, obtém-se  $F = 1$ , e assim a solução particular é do tipo constante,  $p_n^p = \frac{a}{1+bk}$ .

A solução geral da equação é  $p_n = C(-bk)^n + \frac{a}{1+bk}$ , com  $C \in \mathfrak{R}$ .

b) Por hipótese  $-1 < -bk < 0$ , assim  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n \stackrel{hip}{=} \frac{a}{1+bk}$  que é um valor real positivo.

### III

a) As singularidades da função são  $z = 4i$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1+i$  e  $z = -1$ . Como

$\lim_{z \rightarrow 4i} f(z)$  não existe, pois a exponencial complexa é uma função periódica,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty \wedge \lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \frac{-(1-i)e^{-1/4i}}{2},$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+i} f(z) = \infty \wedge \lim_{z \rightarrow 1+i} (z-1-i)f(z) = \frac{e^{1/(1-3i)}}{(2+i)(1+i)^2},$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \infty \wedge \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \frac{-(2-i)e^{1/(-1-4i)}}{5},$$

então, a primeira é uma singularidade essencial, a segunda é um pólo de ordem 2 e as duas últimas são pólos simples.

b)  $z = 4i \in \text{ext } \gamma$   
 $z = 0, 1+i, -1 \in \text{int } \gamma$

Aplicando o teorema dos Resíduos de Cauchy,  $f$  é holomorfa no conexo

$A = \left\{ z \in C : |i-z| < \frac{7}{2} \right\}$  que contém a curva  $\gamma$ , esta é uma curva de Jordan regular que

contém no seu interior as singularidades  $z = 0, 1+i, -1$ , obtém-se o valor do integral

$$\int_{|i-z|=2} f(z) dz = 2\pi i (\text{Re } s(f, 0) + \text{Re } s(f, 1+i) + \text{Re } s(f, -1)), \text{ onde}$$

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \frac{(1-15i)e^{-1/4i}}{16(1+i)^2},$$

$$\operatorname{Res}(f,1+i) = \frac{e^{1/(1-3i)}}{(2+i)(1+i)^2},$$

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \frac{-(2-i)e^{1/(-1-4i)}}{5}.$$