Departamento de Matemática
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática I - 2º Semestre - 2017/2018

Exame de Época Normal - 12 de junho de 2018

Parte I - Duração: 1 hora

Nome:	**Número:**

Cotação: 1)$(1,5)$; **2.a)**$(1,5)$; **2.b)**$(1,0)$; **3)**$(1,5)$; **4)**$(1,5)$; **5)**$(1,0)$; **6.a)**$(1,0)$; **6.b)**$(1,0)$.

1. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ é invertivel e calcule A^{-1}.

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{l3 \to l3 - 4\times l2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Logo, $r(A) = 3$ e A e invertível. Aplicando esta mesma transformação à matriz identidade:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{l3 \to -\frac{1}{2}\times l3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{l3 \to l2 - 2\times l3 \wedge l1 \to l1 - 3\times l1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{l1 \to l1 - 2\times l2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & a^2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ 2x & + & ay & + & z & = & 3 \end{array}\right. ,$$

onde a e b são parâmetros reais.

a. Determine para que valores de a o sistema é de Cramer.
Resolução:
O sistema é de Cramer se a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}$ for invertível.

$$\begin{bmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l2 \to l2 - l1 \wedge l3 \to l3 - l1} \begin{bmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 0 & 2-a^2 & 0 \\ 1 & a-a^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, aplicando o teorema de Laplace ao longo da terceira coluna:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 0 & 2-a^2 & 0 \\ 1 & a-a^2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 2-a^2 \\ 1 & a-a^2 \end{vmatrix} = -(2-a^2) = a^2 - 2, \text{ e A e invertível se } a^2 - 2 \neq 0.$$

Logo, A é invertível se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, e nestas condicões, o sistema e de Cramer.

b. Considere $a = \sqrt{2}$. Para que valor(es) de b o sistema é impossível?

Resolução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 2 & \sqrt{2} & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{l2 \to l2 - l1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 2 & \sqrt{2} & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{l2 \leftrightarrow l3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right]$$

Logo, o sistema e impossível para $b \neq 1$.

3. Seja n um número natural, A uma matriz quadrada de ordem n e I_n a matriz identidade.

Sabe-se que

$$5A^2 + 2A = 3I_n.$$

Mostre que A é invertível.

Resolucão

$5A^2 + 2A = 3I_n \implies A(5A + 2I_n) = 3I_n \implies A(\frac{5}{3}A + \frac{2}{3}I_n) = I_n$

Logo A e invertível e $A^{-1} = (\frac{5}{3}A + \frac{2}{3}I_n)$.

4. Mostre por indução matemática que para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + (2n-2) + 2n = n(n+1).$$

Resolucão:

Consideremos, para $n \in \mathbb{N}$, a proposicão:

$$P(n) : 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + (2n-2) + 2n = n(n+1).$$

Inicializacao

A proposição $P(1)$ é verdadeira. De facto,

$$P(1) : 2 = 1(1+1) \iff 2 = 2.$$

Hereditariedade

Fixemos $n \in \mathbb{N}$.

Pretendemos mostrar que, se $P(n)$ for uma proposição verdadeira (hipótese de indução), então a proposiçãoo $P(n+1)$ é igualmente verdadeira (tese de indução).

$$P(n+1) : 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + (2n-2) + 2n + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

$$\iff n(n+1) + 2n + 2 = (n+1)(n+2)$$

pela hipótese de indução. Assim,

$$\begin{aligned} P(n+1) &\iff n^2 + 3n + 2 = n^2 + 2n + n + 2 \\ &\iff n^2 + 3n + 2 = n^2 + 3n + 2 \end{aligned}$$

o que e uma proposição verdadeira, ficando a demonstração concluída.

5. Determine o exterior e a fronteira do conjunto

$$X =]0;1] \setminus \Big\{ e^{-n} \ : \ n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Resolução:

$fr(X) = \{0,1\} \cup \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$

$ext(X) = \mathbb{R} \setminus [0,1]$

6. Considere, para um certo parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3k^{2n+1}}{(\frac{1}{4}k^2+1)^n}$.

a. Calcule, justificando, a soma da série para $k = 1$.

Resolução:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 \times 1^{2n+1}}{(\frac{1}{4} \times 1^2 + 1)^n} = 3 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{(\frac{1}{4}+1)^n} = 3 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}\right)^n = 3 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 3 \times \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}$

$= 3 \times \frac{4}{5} \times 5 = 12$

b. Determine para que valores do parâmetro k a série é convergente.

Resolução:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3k^{2n+1}}{(\frac{1}{4}k^2+1)^n}. = 3k \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(k^2)^n}{(\frac{1}{4}k^2+1)^n} = 3k \times \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{k^2}{\frac{1}{4}k^2+1}\right)^n$

Trata-se de uma série geométrica de razão $r = \frac{k^2}{\frac{1}{4}k^2+1}$.

Esta razão é positiva para todo o valor de k. Logo, a série converge se:

$\frac{k^2}{\frac{1}{4}k^2+1} < 1 \iff k^2 < \frac{1}{4}k^2 + 1 \iff k^2 - \frac{1}{4}k^2 - 1 < 0 \iff \frac{3}{4}k^2 - 1 < 0$

Os zeros são: $\frac{3}{4}k^2 - 1 = 0 \iff k = -\sqrt{\frac{4}{3}} \vee k = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Logo, $\displaystyle\frac{3}{4}k^2 - 1 < 0 \iff k \in \left] -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right[$, e a série converge neste mesmo intervalo.