LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática I - 2º Semestre - 2017/2018

Exame de Época Normal - 12 de junho de 2018

Parte II - Duração: 1 hora

Nome:	**Número:**

Cotação: 1)$(2,0)$; **2.a)**$(1,0)$; **2.b)**$(1,0)$; **3)**$(2,0)$; **4)**$(2,0)$; **5**$(2,0)$.

1. Calcule o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{e^x-1-x}.$$

Resolução:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-x\sin(x)-\cos(x)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{-sin(x)-x\cos(x)}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$$

aplicando em cada passo a Regra de Cauchy, dada a presenca de indeteminações do tipo $\frac{0}{0}$.

2. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

a. Calcule $f(1)$.

Resolução:

$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

b.Mostre[1] que $f' = 0$ e deduza que para todo o $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Resolução:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x})^2} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0, \forall x > 0$$

Se $f'(x) = 0, \forall x > 0 \implies f$ é constante $\forall x > 0$. Verificou-se em a. que $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Logo

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

[1] apresente o seu cálculo de forma cuidadosa

3. Considere a função f definida em $D =]-1; +\infty[$ pela expressão $f(x) = \ln(1+x)$.

Explicite o polinómio de Taylor de ordem 2 centrado em $a = 0$ de f e utilize-o para obter uma aproximação de $\ln\left(\frac{11}{10}\right)$.

Resolução:

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

O polinómio de Taylor em torno de $a = 0$: $P(x) = f(0) + \dfrac{1}{1!} \times f'(0) \times (x-0) + \dfrac{1}{2!} \times f''(0) \times (x-0)^2$.

Assim,
$f(x) \approx 0 + x + \frac{1}{2} \times (-1) \times x^2$ e $f(x) \approx x - \frac{x^2}{2}$

$\ln(\dfrac{11}{10}) = \ln(1 + \dfrac{1}{10}) = f(\dfrac{1}{10}) \approx \dfrac{1}{10} - \dfrac{(\frac{1}{10})^2}{2} = \dfrac{19}{200} = 0,095.$

4. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2-x} \arctan^2(t)dt$.

Explicite uma expressão para F' e determine os intervalos de monotonia de F.

Resolucão:

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$F'(x) = (x^2 - x)' \times \arctan^2(x^2 - x) = (2x - 1) \times \arctan^2(x^2 - x)$.

Tem-se $\arctan^2(x^2 - x) \geq 0$ para todo o x, logo a monotonia de F depende apenas do sinal do fator $(2x - 1)$.

Como $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$, F é crescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ e decrescente em $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

5. Calcule
$$\int_0^2 (xe^x + xe^{x^2})dx.$$

Resolução:

$$\int_0^2 (xe^x + xe^{x^2})dx = \int_0^2 (xe^x)dx + \int_0^2 (xe^{x^2})dx$$

O primeiro integral resolve-se integrando por partes e o segundo é imediato:

$$\begin{aligned}
&= [xe^x]_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 e^x dx + \frac{1}{2}\int_0^2 (2xe^{x^2})dx \\
&= 2e^2 - [e^x]_{x=0}^{x=2} + \frac{1}{2}[e^{x^2}]_{x=0}^{x=2} \\
&= 2e^2 - (e^2 - 1) + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} \\
&= e^2 + \frac{e^4}{2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Espaï¿$\frac{1}{2}$o adicional para a resoluï¿$\frac{1}{2}$ï¿$\frac{1}{2}$o do teste

Espaï¿½o adicional para a resoluï¿½ï¿½o do teste