INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV - Licenciatura MAEG

Época Normal – 12 de Junho de 2018

Duração: 2 horas

I

1. Considere o PVI $\begin{cases} e^{-t}x^2+4x+2\left(xe^{-t}+1\right)x'=0 \\ x(0)=2 \end{cases}$.

a) **(1,5)** Mostre que a equação não é exacta e determine um factor integrante.

b) **(2,5)** Utilize como factor integrante a função $\mu(t)=e^{2t}$ para resolver o PVI, e indique o intervalo máximo de existência de solução.

2. Atenda à seguinte

Definição: Um sistema dinâmico é uma função de classe C^1, $\phi:\Re\times E\to E$, onde E é um subconjunto aberto de $\Re^n$, e para $\phi_t(x)=\phi(t,x)$, ϕ_t satisfaz as seguintes condições:

i) $\phi_0(x)=x \quad \forall_{x\in E}$

ii) $(\phi_t\circ\phi_s)(x)=\phi_{t+s}(x) \quad \forall_{t,s\in\Re}\forall_{x\in E}$.

a) **(1,5)** Mostre que se A é uma matriz $n\times n$ de coeficientes constantes, então a função $\phi(t,x)=e^{At}x$ define um sistema dinâmico em $\Re^n$.

b) **(1,0)** Mostre que para cada $x_0\in\Re^n$, $\phi(t,x_0)$ é solução do PVI $\begin{cases} x'=Ax \\ x(0)=x_0 \end{cases}$.

c) **(2,0)** Determine o sistema dinâmico definido pelo PVI

$\begin{cases} x'=Ax \\ x(0)=(0,1) \end{cases}$ onde $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Considere a equação diferencial $x''+3x'+kx=0$, com $k \in \Re$.

a) **(1,0)** Obtenha o sistema de EDOs equivalente à equação dada.

b) **(1,5)** Sendo A a matriz associada ao sistema obtido, determine os valores de k para os quais os valores próprios da matriz A são negativos e distintos.

c) **(2,0)** Para ***k=2*** estude a estabilidade da solução da equação.

II

Seja a equação com diferenças $2x(n+3)+x(n+2)-5x(n+1)+2x(n)=2^{-n}$.

a) **(2,5)** Determine a solução geral da equação.

b) **(1,0)** Para que valores das constantes arbitrárias a solução $x(n)$ verifica $\lim_{n\to+\infty} x(n)<\infty$?

III

Considere a função complexa de variável complexa $f(z)=\dfrac{z^2}{sen(\pi z)}$.

a) **(2,0)** Determine e classifique as singularidades da função.

b) **(1,5)** Determine o valor do integral $\int_\gamma f(z)dz$, onde γ é a elipse $|z+1|+|1-z|=3$.

fim