SOLUÇÕES - Época Normal – 12 de Junho de 2018

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

I

1. a) $\frac{\partial M}{\partial x} = 2xe^{-t} + 4 \neq \frac{\partial N}{\partial t} = -2xe^{-t}$. Um factor integrante é $\mu(t) = e^{2t}$

   b) $x^2e^t + 2xe^{2t} = 8 \quad \forall t \in I = \Re$

2. c) $\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{4}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) \\ x_2(t) = \frac{1}{4}\left(e^{2t} + 3e^{-2t}\right) \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -kx - 3y \end{cases}$ com $k \in \Re$

   b) $k \in \left(0, \frac{9}{4}\right)$

   c) **Qualquer** solução da equação é assintoticamente estável

II

a) $x(n) = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + C_3(-2)^n - \frac{4}{5}n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad C_1, C_2, C_3 \in \Re$

b) $C_1, C_2 \in \Re \wedge C_3 = 0$

III

a) As singularidades são $z = k, k \in Z$.

- São pólos simples, $z = k \in Z \setminus \{0\}$:

$$\lim_{z\to k} f(z) = \infty \wedge \lim_{z\to k}(z-k)f(z) = \lim_{z\to k}\frac{3z^2-2kz}{\pi\cos(\pi z)} = \begin{cases} k^2/\pi & \text{se } |k| \text{ é par} \\ -k^2/\pi & \text{se } |k| \text{ é ímpar} \end{cases}$$

- $k=0$ é uma singularidade removível, $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{2z}{\pi\cos(\pi z)} = 0$

b)

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Re}s(f,0)+\operatorname{Re}s(f,1)+\operatorname{Re}s(f,-1)\right) = 2\pi i\left(0-\frac{1^2}{\pi}-\frac{(-1)^2}{\pi}\right) = -4i$$

.

fim