Distribuições

Tópicos de Estatística

José Passos

ISEG-UTL

11 de Setembro de 2018

Bernoulli

- Prova de Bernoulli é uma experiência com apenas dois resultados: sucesso e insucesso.
- Uma v.a. tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p se esta assumir apenas dois valores, sucesso e insucesso, ou 1 e 0, com probabilidade p e $1 - p$ respectivamente:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

- Se a v.a. X tem distribuição de Bernoulli a função de probabilidade tem a expressão,

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \; x = 0 \text{ ou } x = 1, \; 0 < p < 1.$$

Bernoulli (cont)

- Momentos:

$$E(X) = 1p + 0(1-p) = p \quad (1)$$

$$Var(X) = p(1-p)^2 + (0-p)^2(1-p) = p(1-p) \quad (2)$$

$$M(t) = (1-p) + pe^t. \quad (3)$$

Binomial

- Vamos observar o valor da v.a. X, sucesso ou insucesso, numa sequência de n provas de Bernoulli independentes, cada uma com probabilidade de sucesso p, e registamos o valor da sua soma, Y , i. é., o número total de sucessos.
- Seja y o número de sucessos em n provas independentes. Qualquer sequência de valores de X com soma y em n provas tem probabilidade,

$$P(Y = y) = p^y (1-p)^{n-y}, \; y = 0, 1, 2, ..., n, \; 0 < p < 1,$$

- como há

$$\binom{n}{y} = \frac{n!}{(n-y)!y!}$$

sequências destas, tem-se

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, \; y = 0, 1, 2, ..., n, \; 0 < p < 1.$$

Binomial (cont)

- Momentos:

$$E(Y) = np \tag{4}$$

$$E(Y^2) = n(n-1)p^2 + np \tag{5}$$

$$Var(Y) = np(1-p) \tag{6}$$

$$M(t) = (1 - p + pe^t)^n. \tag{7}$$

- Notas:
  - Se $X \sim B(n, p)$ e $Y \sim B(m, p)$ são independentes então $X + Y \sim B(n + m, p)$
  - se n é grande, a binomial pode ser aproximada de forma razoável pela normal
  - se n é grande, e com $\lambda = np$, a distribuição $Po(\lambda)$ pode ser utilizada como uma aproximação à $B(n, p)$

Binomial negativa

- Quando se fixa o número de provas de Bernoulli n, o número de sucessos é uma Binomial.
- Quando se fixa o número de sucessos r, e se considera o número de provas que têm de realizar-se até se obterem r sucessos, então o número de provas é uma v.a., $X \sim NB(r, p)$, que assume valores da sucessão $r, r+1, r+2, \ldots$, com função probabilidade,

$$P(X = x) = \binom{x-1}{x-r} p^r (1-p)^{x-r}, \; x = r, r+1, r+2, \ldots, \; 0 < p < 1.$$

- O acontecimento $X = x$ só pode ocorrer se houver exactamente $r-1$ sucessos nas $x-1$ primeiras provas e 1 sucesso na x-ésima prova.

Binomial negativa (cont)

- Fazendo a mudança de variável $Y = X - r$, onde Y representa o nº de insucessos antes de r-ésimo sucesso, temos,

$$P(Y = y) = \binom{y + r - 1}{y} p^r (1-p)^y, \; y = 0, 1, 2, \ldots, \; 0 < p < 1.$$

Binomial negativa (cont)

- Momentos (Y):

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= r(1-p)/p \\
Var(Y) &= r(1-p)/p^2 \\
M(t) &= p^r(1-(1-p)e^t)^{-r}, \ t < -\log(1-p)
\end{aligned}
$$

- Momentos (X):

$$
\begin{aligned}
E(X) &= r/p \\
Var(X) &= r(1-p)/p^2 \\
M(t) &= (pe^t)^r(1-(1-p)e^t)^{-r}, \ t < -\log(1-p)
\end{aligned}
$$

reparametrizando a binomial negativa em termos da média, $\mu = r(1-p)/p$, tem-se,

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \mu \\
Var(Y) &= \mu + \mu^2/r
\end{aligned}
$$

- Notas:

- A distribuição geométrica é uma distribuição discreta, e pode ser vista como a probabilidade de a primeira ocorrência de um sucesso acontecer ao fim de x provas de Bernoulli, cada uma com probabilidade de sucesso p.
- Pode ser vista como a distribuição do tempo de espera por 1 sucesso.
- É um caso particular da binomial negativa com $r = 1$.
- Uma v.a. X tem distribuição geométrica, se a f.p. se puder escrever como,

$$P(X = x) = p(1-p)^x, \; x = 0, 1, 2, \dots \;\; 0 < p < 1$$

Geométrica (cont)

- Momentos:

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$
$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$
$$M(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \; t < -\log(1-p)$$

Multinomial

- A distribuição multinomial generaliza a binomial.
- Se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são acontecimentos mutuamenta exclusivos com $P(X_1) = p_1, \ldots, P(X_k) = p_k$ então a probabilidade de em n provas X_1 ocorrer x_1 vezes, ..., X_k ocorrer x_k vezes, é dada por,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k},$$

$$x_i \geq 0, \sum x_i = n, \sum p_1 = 1$$

Multinomial (cont)

- Momentos:

$$
\begin{aligned}
E(X_i) &= np_i \\
E({X_i}^2) &= n(n-1){p_i}^2 + np_i \\
E(X_i X_j) &= n(n-1)p_i p_j \\
Var(X_i) &= np_i(1-p_i) \\
Cov(X_i, X_j) &= -np_i p_j
\end{aligned}
$$

Poisson

- A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta que expressa a probabilidade de ocorrência de um número de acontecimentos em determinado período de tempo fixo.
- Se o valor esperado das ocorrências no intervalo de tempo fixo é λ a probabilidade de haver exactamente x ocorrências é dada por,

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \; x = 0, 1, 2, \ldots, \; \lambda > 0.$$

- Momentos:

$$E(X) = \lambda$$
$$E(X^2) = \lambda(\lambda + 1)$$
$$Var(X) = \lambda$$
$$M(t) = exp(\lambda(e^t - 1))$$

- Notas:
  - Se $X \sim Po(\lambda)$ e $Y \sim Po(\theta)$ são independentes então $X + Y \sim Po(\lambda + \theta)$
  - Se $X \sim Po(\lambda)$ e $(Y \mid X = x) \sim B(x, p)$ então $Y \sim Po(\lambda p)$
  - A binomial converge para a Poisson quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mantendo-se constante np.

Uniforme

- A distribuição uniforme é uma distribuição contínua com dois parâmetros definida num intervalo $[a, b]$.
- Uma v.a. X tem distribuição uniforme, $X \sim U(a, b)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \; x \in [a, b].$$

Uniforme (cont)

- Momentos:

$$E(X) = (a+b)/2$$
$$E(X^2) = (a^2 + ab + b^2)/3$$
$$Var(X) = (b-a)^2/12$$
$$M(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, \ t \neq 0.$$

Como $M(t)$ e as suas derivadas não estão definidas em $t = 0$, os momentos de ordem $k = 1, 2, \ldots$ obtêm-se calculando $\lim_{t->0} M^{(k)}(t)$

Uniforme (cont)

- Notas:
  - Com $a = 0$ e $b = 1$ tem-se a uniforme standard, $U(0, 1)$
  - Se $X \sim U(0, 1)$ então também $Y = 1 - X \sim U(0, 1)$
  - Se $X \sim U(0, 1)$ então $Y = -(1/\lambda) \log X \sim Ex(\lambda)$
  - A soma de duas variáveis independentes e com a mesma distribuição uniforme é uma variável com distribuição triangular.

Normal

- A distribuição normal é uma distribuição contínua, definida em $\Re$, com dois parâmetros e pode ser utilizada para modelar uma grande variedade de fenómenos.
- Uma v.a. X tem distribuição normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \ \mu \in \Re, \ \sigma > 0.$$

Normal (cont)

- Momentos:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \mu \\
E(X^2) &= \mu^2 + \sigma^2 \\
E(X^3) &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \\
E[(X-\mu)^2] = Var(X) &= \sigma^2 \\
E[(X-\mu)^3] &= 0 \\
M(t) &= \exp\left\{\mu t + (1/2)\sigma^2 t^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Normal (cont)

- Notas:
  - Para n grande a $B(n, p)$ é aproximadamete $N(np, np(1-p))$
  - Para λ grande a $Po(\lambda)$ é aproximadamente $N(\lambda, \lambda)$
  - Para ν grande a $t(\nu)$ é aproximadamente $N(0, 1)$
  - Para ν grande a $\chi^2_{(\nu)}$ é aproximadamente $N(\nu, 2\nu)$
  - Se $X \sim N(\mu, \sigma)$ e $a, b \in \Re$ então $(aX + b) \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
  - A soma (ou combinações lineares) de v.a.s independentes com distribuição normal é ainda normal. O inverso também é verdadeiro.
  - Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.s independentes com distribuição normal standard, então $\sum_i^n X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$
  - A média amostral, $\overline{X}_n$, de uma qualquer população onde existe média e variância, é uma v.a. que converge em distribuição para a normal, quando $n \to \infty$.

Exponencial

- A distribuição exponencial é uma distribuição contínua, definida em $\Re^+$, com um parâmetro e pode ser utilizada para modelar tempos de espera.
- Uma v.a. X tem distribuição exponencial, $X \sim Ex(\delta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \delta e^{-\delta x}, \; x > 0, \; \delta > 0.$$

Exponencial (cont)

- Momentos:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1/\delta \\
E(X^2) &= 2/\delta^2 \\
Var(X) &= 1/\delta^2 \\
M(t) &= \delta/(\delta - t), \ t < \delta
\end{aligned}
$$

Exponencial (cont)

- Notas:
  - Se X é uma exponencial tem-se $P(X > t + s \mid X > s) = P(X > t)$, $\forall t, s \geq 0$
  - Se $X_i \sim Ex(\delta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então $\sum X_i \sim G(n, \delta)$
  - Se $X \sim Ex(\delta)$ e $k > 0$, então $kX \sim Ex(\delta/k)$
  - Se $X_i \sim Ex(\delta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então $\min X_i \sim Ex(\sum \delta_i)$

Gama

- A distribuição gama é uma distribuição contínua, definida em $\Re^+$, com dois parâmetros e pode ser utilizada para modelar tempos de espera, i.é., tempo até a ocorrência de determinado acontecimento.
- Uma v.a. X tem distribuição gama, $X \sim G(\alpha, \delta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\delta}, \; x > 0, \; \alpha > 0, \; \delta > 0.$$

- $\Gamma(\alpha)$ é a função gama, definida por,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \, \mathrm{d}x.$$

- $\Gamma(\alpha)$ verifica a relação, $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$

Gama (cont)

- Uma parametrização habitual consiste em fazer $\beta = 1/\delta$, parâmetro de escala,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \; x > 0, \; \alpha > 0, \; \beta > 0.$$

- Momentos (na parametrização α, δ):

$$\begin{aligned} E(X) &= \alpha/\delta \\ E(X^2) &= \alpha(1+\alpha)/\delta^2 \\ Var(X) &= \alpha/\delta^2 \\ M(t) &= (1-(1/\delta)t)^{-\alpha}, \; t < \delta \end{aligned}$$

Gama (cont)

- Notas:
  - Se $X_i \sim G(\alpha_i, \delta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então $\sum X_i \sim G(\sum \alpha_i, \delta)$
  - Se $\alpha = 1$, então $X \sim Ex(\delta)$
  - Se $X_i \sim Ex(\delta)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então $\sum X_i \sim G(n, \delta)$
  - Se $\alpha = n/2$ e $\delta = 1/2$, então $X \sim \chi^2_{(n)}$
  - Se $X \sim G(\alpha, \delta)$, então $2\delta X \sim \chi^2_{(2\alpha)}$
  - Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então $(1/2)(X - \mu)^2/\sigma^2 \sim G(1/2, 1)$

Weibull

- A distribuição Weibull é uma distribuição contínua definida em $\Re^+$ e é usualmente utilizada em problemas de fiabilidade (sobrevivência).
- Uma v.a. X tem distribuição Weibull com 3 parâmetros, $X \sim W(\alpha, \beta, \theta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \alpha\beta(x-\theta)^{\beta-1}e^{-\alpha(x-\theta)^{\beta}},\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \theta \geq 0.$$

- A Weibull com 2 parâmetros, quando $(\theta = 0)$, é mais usual, $X \sim W(\alpha, \beta)$, com f.d.p.,

$$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^{\beta}},\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Weibull (cont)

- Momentos (com $\theta = 0$):

$$E(X) = \frac{\Gamma(1 + 1/\beta)}{\alpha^{1/\beta}}$$

$$E(X^k) = \frac{\Gamma(1 + k/\beta)}{\alpha^{k/\beta}}, \ k = 1, 2, \ldots$$

$$Var(X) = \frac{1}{\alpha^{2/\beta}}[\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)]$$

- Notas:
  - Se $\beta = 1$ e $\theta = 0$, então $X \sim Ex(\alpha)$

Beta

- A distribuição beta standard é uma distribuição contínua com dois parâmetros, definida no intervalo $[0, 1]$ e é usualmente utilizada em estatística bayesiana para modelar proporções.
- Uma v.a. X tem distribuição Beta, $X \sim B(\alpha, \beta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{1}{Be(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ 0 < x < 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

- $Be(\alpha, \beta)$ é a função beta, definida por

$$Be(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, \mathrm{d}x.$$

- $Be(\alpha, \beta)$ verifica a relação $Be(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$

Beta (cont)

- Momentos:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

$$M(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + r}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!}$$

Beta (cont)

- Notas:
  - Se $X \sim G(\alpha, \theta)$ e $Z \sim G(\beta, \theta)$ independentes, então $X/(X+Z) \sim B(\alpha, \beta)$
  - Se $X \sim \chi^2_{(n_1)}$ e $Z \sim \chi^2_{(n_2)}$ independentes, então $X/(X+Z) \sim B(n_1/2, n_2/2)$
  - Com $\alpha = \delta = 1$ tem-se $X \sim B(1,1) \equiv U(0,1)$

Dirichlet

- A distribuição Dirichlet de ordek $k \geq 2$ é uma distribuição contínua multivariada com k parâmetros, definida no simplex aberto de dimensão $k - 1$. É a generalização multivariada da distribuição Beta.
- Uma v.a. $X_1, \ldots, X_k$ tem distribuição Dirichlet, $X \sim D(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, se a f.d.p. conjunta se escrever como,

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{Be(\alpha)} \prod_i^k x_i^{\alpha_i - 1}, \;\; x_i > 0, \; \sum_i^k x_i = 1, \; \alpha_i > 0.$$

- $Be(\alpha)$ é a função beta, definida por

$$Be(\alpha) = \frac{\prod_i^k \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_i^k \alpha_i)}.$$

Dirichlet (cont)

- Momentos:

$$E(X_i) = \frac{\alpha_i}{\sum_i^k \alpha_i}$$

$$Var(X_i) = \frac{\alpha_i(\sum_i^k \alpha_i - \alpha_i)}{(\sum_i^k \alpha_i)^2(\sum_i^k \alpha_i + 1)}$$

$$Cov(X_i, X_j) = \frac{-\alpha_i\alpha_j}{(\sum_i^k \alpha_i)^2(\sum_i^k \alpha_i + 1)}$$

Gama inversa

- A distribuição gama inversa é uma distribuição contínua com dois parâmetros e é comum em estatística bayesiana.
- Uma v.a. X tem distribuição gama inversa, $X \sim GI(\alpha, \delta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{-(\alpha+1)} e^{-\delta/x},\ x > 0,\ \alpha > 0,\ \delta > 0.$$

Gama inversa (cont)

- Momentos:

$$E(X) = \frac{\delta}{\alpha - 1}, \ \alpha > 1$$

$$Var(X) = \frac{\delta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \ \alpha > 2$$

Gama inversa (cont)

- Notas:
  - A distribuição gama inversa obtém-se a partir da gama fazendo a mudança de variável $X = 1/Y$ onde $Y \sim G(\alpha, \delta)$
  - Se $\alpha = n/2$ e $\delta = 1/2$, então $X \sim GI(n/2, 1/2) \equiv \chi^{-2}_{(n)}$ (Qui-quadrado invertida)
  - Se $X \sim GI(n/2, 1/2) \equiv \chi^{-2}_{(n)}$, então $Y = \sqrt{X} \sim \chi^{-1}_{(n)}$ (Qui invertida)

Normal gama inversa

- A distribuição normal gama inversa é uma distribuição contínua com quatro parâmetros e é comum em estatística bayesiana.
- Uma v.a. (X, Y) tem distribuição normal gama inversa, $X \sim NGI(\mu, \nu, \alpha, \delta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x,y) = \frac{\delta^{\alpha}(2\pi/\nu)^{-1/2}}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+3/2)} \exp\left\{-\frac{1}{y}[\delta + \frac{\nu}{2}(x-\mu)^2]\right\}.$$

- Factorizando a densidade conjunta de (X, Y) no produto da condicional de $(X \mid y)$ pela marginal de Y, obtém-se

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|y}(x|y)f_Y(y) = (2\pi y/\nu)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\nu}{2y}(x-\mu)^2\right\} \times$$
$$\times \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{-(\alpha+1)} \exp\left\{-\frac{\delta}{y}\right\}.$$

Normal gama inversa (cont)

- onde $(X|y) \sim N(\mu, y/\nu)$ e $Y \sim GI(\alpha, \beta)$
- Momentos:

$$E(X|y) = \mu$$
$$Var(X|y) = y/\nu$$
$$E(Y) = \frac{\delta}{\alpha - 1}$$
$$Var(Y) = \frac{\delta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}$$

Logistica

- A distribuição logistica é uma distribuição contínua, definida em $\Re$ e é usualmente utilizada em econometria para modelar variáveis categóricas (regressão logística).
- Uma v.a. X tem distribuição logistica, $X \sim L(\mu, s)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{e^{-(x-\mu)/s}}{s(1+e^{-(x-\mu)/s})^2}, \; x \in \Re, \; \mu \in \Re, \; s > 0.$$

Logistica (cont)

- Momentos:

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \frac{\pi^2}{3}s^2$$

$$M(t) = e^{\mu t}\Gamma(1 - st)\Gamma(1 + st), \ |st| < 1.$$

Logistica (cont)

- Notas:
  - Se $X \sim U(0,1)$ então $\mu + \beta(\log(X) - \log(1 - X)) \sim L(\mu, \beta)$
  - Se $X \sim Ex(1)$ então $\mu - \beta \log \frac{e^{-X}}{1-e^{-X}} \sim L(\mu, \beta)$

Log-Logistica

- A distribuição log-logistica é uma distribuição contínua, definida em $\Re^+$ e é usualmente utilizada em análise de sobrevivência (em economia é também conhecida por distribuição Fisk).
- Uma v.a. X tem distribuição log-logistica, $X \sim LL(\alpha, \beta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{[1+(x/\alpha)^{\beta}]^2},\ x > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

- Momentos:

$$E(X) = \alpha \frac{\pi/\beta}{\sin(\pi/\beta)}, \ \beta > 1$$

$$E(X^k) = \alpha^k \frac{k\pi/\beta}{\sin(k\pi/\beta)}, \ \beta > 1$$

$$Var(X) = \alpha^2 \left(\frac{2\pi/\beta}{\sin(2\pi/\beta)} - \frac{\pi^2/\beta^2}{\sin^2(\pi/\beta)} \right)$$

Log-Logistica (cont)

- Notas:
  - A log-logistica é a distribuição de probabilidade de uma v.a. cujo logaritmo tem distribuição logistica.
  - Se $X \sim LL(\alpha, \beta)$ então $Y = \log X \sim L(\log \alpha, 1/\beta)$
  - Se $X \sim LL(\alpha, \beta)$ então quando $\beta \to \infty$, $LL(\alpha, \beta) \to L(\alpha, \alpha/\beta)$

Log-Normal

- A distribuição log-normal é uma distribuição contínua, definida em $\Re^+$.
- Uma v.a. X tem distribuição log-normal, $X \sim LN(\mu, \sigma)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = x^{-1}(2\pi\sigma^2)^{-1/2}e^{-(\log x - \mu)^2/2\sigma^2}, \ \mu \in \Re, \ \sigma > 0$$

Log-Normal (cont)

- Momentos:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \exp\{\mu + \sigma^2/2\} \\
E(X^k) &= \exp\{k\mu + k^2\sigma^2/2\},\ k = 1, 2, \ldots \\
Var(X) &= \left(\exp\{\sigma^2\} - 1\right)\exp\{2\mu + \sigma^2\}.
\end{aligned}
$$

Log-Normal (cont)

- Notas:
  - A log-normal é a distribuição de probabilidade de uma v.a. cujo logaritmo tem distribuição normal.

Cauchy

- A distribuição Cauchy é uma distribuição contínua, definida em $\Re$.
- Uma v.a. X tem distribuição Cauchy, $X \sim C(\mu, \beta)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{(x-\mu)^2 + \beta^2}, \; \mu \in \Re, \; \beta > 0$$

- Esta distribuição não tem momentos.
- A distribuição Cauchy standard, $C(0, 1)$, pode-se obter como o rácio de duas distribuições normais standard, independentes.

Pareto

- A distribuição Pareto é uma distribuição contínua com dois parâmetros, (θ, α), definida em $[\theta, +\infty)$.
- Uma v.a. X tem distribuição Pareto, $X \sim Pa(\theta, \alpha)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}},\ x > \theta,\ \theta > 0,\ \alpha > 0$$

- Esta distribuição foi definida por Vilfredo Pareto para estudar a repartição da riqueza entre os indivíduos pois descreve relativamente bem a ideia de uma grande parcela da riqueza estar apropriada por uma parcela pequena da população.

Pareto (cont)

- Momentos:

$$E(X) = \frac{\alpha\theta}{\alpha - 1}, \ \alpha > 1$$

$$Var(X) = \frac{\alpha\theta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \ \alpha > 2.$$

Laplace

- A distribuição Laplace é uma distribuição contínua, definida em $\Re$.
- Uma v.a. X tem distribuição Laplace, $X \sim La(\mu, \sigma)$, se a f.d.p. se escrever como,

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right\}, \; \mu \in \Re, \; \sigma > 0$$

Laplace (cont)

- Momentos:

$$E(X) = \mu$$
$$Var(X) = 2\sigma^2$$
$$M(t) = \frac{\exp(\mu t)}{1 - \sigma^2 t^2}, \ |t| < 1/\sigma.$$

Laplace (cont)

- Notas:
  - Se $X \sim La(0, \sigma)$ então $|X| \sim Ex(1/\sigma)$
  - Se X e Y são v.a.s independentes com distribuição $Ex(1/\sigma)$ então $(X - Y) \sim La(0, \sigma)$
  - Se X e Y são v.a.s independentes com distribuição $U(0, 1)$ então $\log(X/Y) \sim La(0, 1)$

Bibliografia

- Johnson; Kotz; Balakrishnan (1995), *Continuous Univariate Distributions*, Volume 2, 2nd Edition, Wiley-Interscience.
- Johnson; Kotz; Balakrishnan (1994), *Continuous Univariate Distributions*, Volume 1, 2nd Edition, Wiley-Interscience.
- Johnson; Kemp; Kotz (2005), *Univariate Discrete Distributions*, 3rd Edition, Wiley-Interscience.