Mestrados

Métodos Quantitativos para DEE

2018/2019

Leonor Santiago Pinto
Gab 506 Quelhas
Telef 213 925 845
Email: lspinto@iseg.ulisboa.pt

Aula 3

Hipóteses e propriedades

STFA:

b) – e) do protótipo 1 e protótipo 2

Programa

1. Tópicos de Investigação Operacional
    1. O Modelo de Programação Linear
        1. Introdução
        2. Formulação e resolução gráfica
        3. **Hipóteses e propriedades**
        4. Utilização do *Solver/Excel* na resolução de problemas
    2. Dualidade e Análise de Sensibilidade
        1. Introdução
        2. Dualidade
        3. Interpretação económica, preços sombra e relações primal-dual
        4. Análise de sensibilidade
            1. Segundos membros das restrições
            2. Coeficientes da função objetivo
    3. Problemas de Transportes e Afetação
        1. Introdução
        2. O problema de transportes
        3. O problema da afetação
        4. Utilização do *Solver/Excel* na resolução de problemas
    4. Programação Linear Inteira
        1. Formulação de problemas com recurso a variáveis binárias e inteiras
        2. Utilização do *Solver/Excel* na resolução de problemas

Protótipo 2 – formulação

x_1 número de anúncios de 1 minuto durante comédias

x_2 número de anúncios de 1 minuto durante jogos de futebol

$$Min\ z = 50x_1 + 100\ x_2$$

custo da campanha (milhares $)

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\ 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

target mulheres

target homens

(encontrada solver) $(x_1 = 3{,}6, x_2 = 1{,}4)\ z = 320$

Protótipo 2 – formulação e solver

x_1 número de anúncios de 1 minuto durante comédias

x_2 número de anúncios de 1 minuto durante jogos de futebol

$$Min\ z = 50x_1 + 100\ x_2$$ custo da campanha (milhares $)

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\ 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

target mulheres

target homens

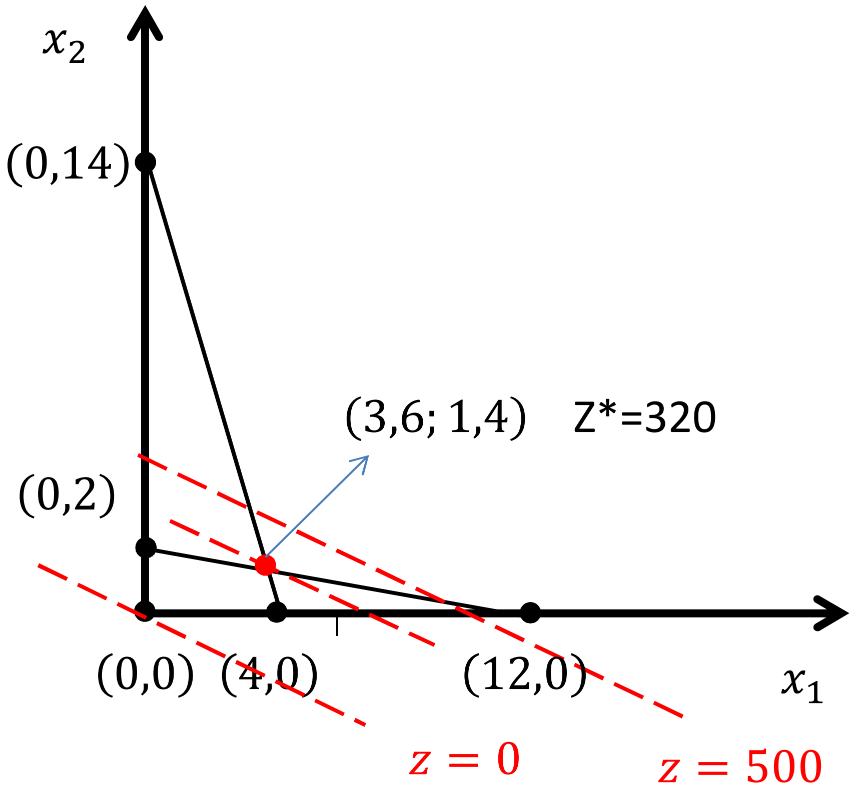
solução (encontrada solver)

	comedia	futebol			
Mulheres	7	2	28	≥	28
Homens	2	12	24	≥	24
custo	50	100	320		
	3,6	1,4			

Protótipo 2 resolução gráfica

$$Min\ z = 50x_1 + 100\ x_2$$

$$\text{s.a}\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \\ 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$(x_1 = 3{,}6, x_2 = 1{,}4)\ z = 320$

b) Considerando o mesmo conjunto de soluções admissíveis, resolva os seguintes problemas modificados:

b1) max z=x1-x2 **b2)** min z=x2 **b3)** max z=x1+4x2
b4) min z=2x1-x2 **b5)** max z=2x1- x2

c) A direcção da empresa pretende saber quais as consequências de aceitar uma encomenda de 90 comboios.

d) Resolva o problema inicial, exigindo ainda que se produza exatamente a mesma quantidade dos dois brinquedos.

e) e1) Resolva o problema inicial admitindo que não há limitações no número de horas disponíveis para acabamentos em verniz nem no número de horas de carpintaria.

e2) Para esse novo problema, modifique o objetivo para b5).

Modelo de PL: forma standard

$$Max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \textit{função objetivo}$$

$$s.a \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\ldots,m & \Big\} \textit{ restrições funcionais} \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots,n & \Big\} \textit{ restrições de sinal} \end{cases}$$

Modelo geral de PL

$$Max\ \ (Min)\ \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.a\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, & i = 1,\ldots,m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, & i = m_1+1,\ldots,m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = m_2+1,\ldots,m \end{array}\right\} restrições\ \ funcionais \\ \left.\begin{array}{ll} x_j \ge 0, & j = 1,\ldots,n_1 \\ x_j \le 0, & j = n_1+1,\ldots,n_2 \\ x_j\ livre, & j = n_2+1,\ldots,n \end{array}\right\} restrições\ \ de\ \ sinal \end{cases}$$

Definições

solução: qualquer atribuição de valores às variáveis

solução admissível (SA): solução que satisfaz todas as restrições (incluindo as de sinal)

solução não admissível (SNA): solução que não satisfaz pelo menos uma das restrições

região admissível (RA): conjunto de todas as soluções admissíveis

solução ótima (SO, x^*): qualquer SA que origine o melhor valor da função objetivo (se houver mais do que uma diz-se que o problema tem soluções ótimas alternativas)

valor ótimo (VO, z^*): melhor valor da função objetivo, na região admissível
(ou seja, valor que a f.o. toma numa SO)

restrição saturada: Dada uma solução, uma restrição diz-se saturada (nessa solução) se é verificada como igualdade

Hipóteses fundamentais de PL

- Proporcionalidade: a contribuição de cada atividade para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é proporcional ao nível da atividade

  (a contribuição de cada variável para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é proporcional ao valor da variável)

- Aditividade: a contribuição de cada atividade para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é independente da contribuição das restantes

- Divisibilidade: cada variável pode tomar qualquer valor

- Certeza: todos os valores dos parâmetros são conhecidos

Def. Dados dois pontos $P, Q \in R^n$, o segmento de reta $\overline{PQ}$ pode ser definido por

$$\overline{PQ} = \{X \in R^n: \ X = \lambda P + (1-\lambda)Q, \qquad \lambda \in [0,1]\}.$$

Def. $S \subset R^n$ é um conjunto convexo se dados quaisquer dois pontos de S, o segmento de reta que os une está contido em S, isto é,

S é convexo se $\forall P, Q \in S, \ \lambda P + (1-\lambda)Q \in S, \ \forall \lambda \in [0,1]$.

Def. $S \subset R^n$ é um conjunto limitado se existe uma bola aberta que o contenha, isto é,

S é limitado se $\exists r > 0: \ S \subset \{X \in R^n: \ \|X\| < r\}$.

Propriedades dos problemas de PL:

1. Qualquer problema de PL pode ser escrito na Forma Standard.

2. A região admissível dum problema de PL é um conjunto convexo.

3. Se a região admissível dum problema de PL for não vazia e limitada, então existe solução ótima.

4. Se um problema de PL tiver solução ótima, então pelo menos um dos pontos extremos (vértices) da região admissível é solução ótima.