Cálculo e Instrumentos Financeiros

Rendas Certas

Alfredo D. Egidio dos Reis

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

3. Rendas Certas

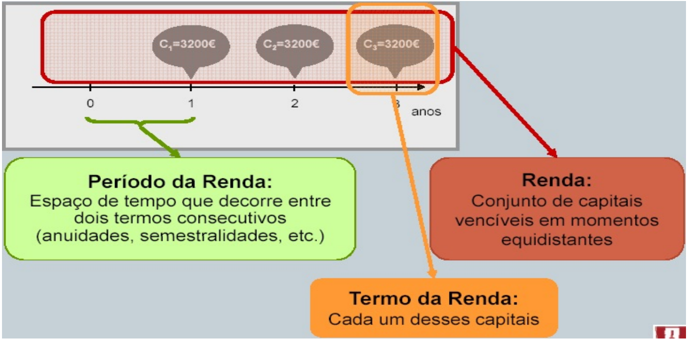
3.1 Conceitos e classificação;
3.2 Valor actual e valor acumulado;
3.3 Rendas com termos constantes e normais;
3.4 Rendas com termos antecipados;
3.5 Rendas diferidas;
3.6 Rendas perpétuas;
3.7 Rendas com termos variáveis;
3.8 Aplicações.

Definição (Renda ou Anuidade)

Conjunto de capitais vencíveis em momentos equidistantes.

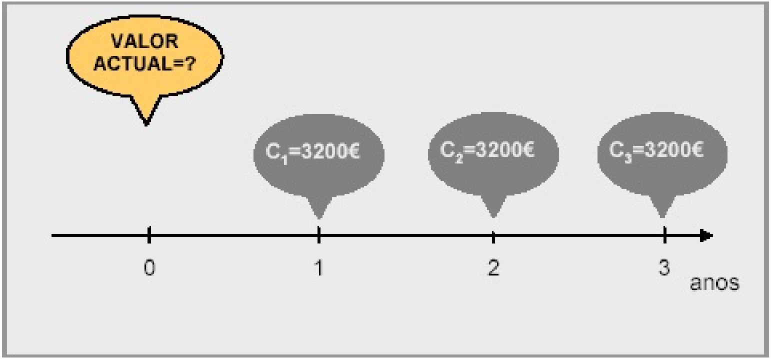
Exemplo

O aluguer de casa tem forma de renda mensal, o leasing do carro, seguro de vida, ...



Valor Actual da Renda

Valor referido ao início do primeiro período, "momento 0". É constituído pela soma dos valores actuais de cada um dos seus termos, referidos ao *momento 0*.

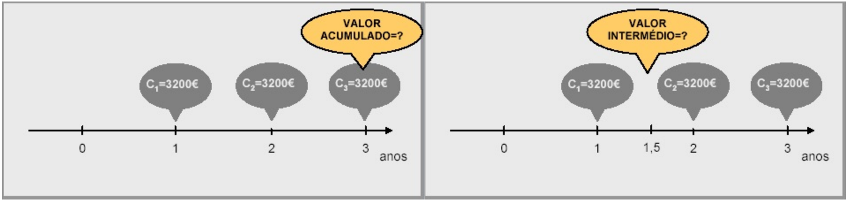


Valor Acumulado da Renda

Valor referido ao fim do último período. É a soma dos valores acumulados/capitalizados de cada um dos seus termos.

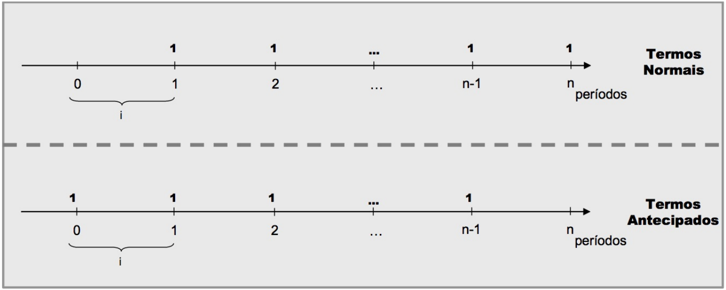
Valor Intermédio da Renda

Soma dos valores acumulados dos termos **vencidos** com a dos valores actuais dos termos **vincendos**, todos referidos ao ponto intermédio.

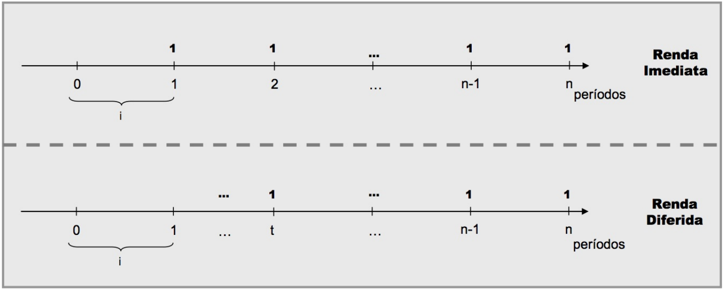


a) **Rendas Postecipadas ou de Termos Normais**: Os termos vencem no final de cada período.

b) **Rendas Antecipadas ou de Termos Antecipados:** Os termos vencem no início de cada período.



a) **Imediatas**: O primeiro termo vence no primeiro período, normal ou antecipado.
b) **Diferidas:** o primeiro termo vence num período posterior. Períodos de *carência*.



a) **Certas**: O vencimento dos termos não depende de casualidades. São apenas estas que tratamos;
b) **Incertas:** Os vencimentos dos termos dependem de eventos aleatórios: Cálculo Actuarial. Ex.: Seguro de vida.

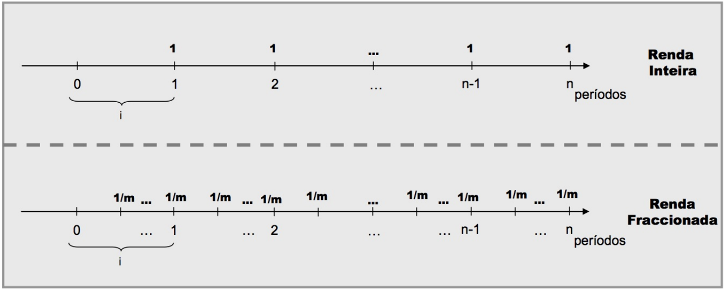
a) **Constantes**: Os termos são todos iguais;
b) **Variáveis:** Os termos não são todos iguais.

a) **Temporárias**: Número finito de termos;
b) **Perpétuas (Perpetuidades):** Número ilimitado de termos.

a) **Discretas**: Termos vencem em momentos de tempo especificados (São todas as que tratamos, período a período);
b) **Contínuas:** Pagamentos feitos continuamente durante determinado período de tempo. De interesse teórico, para modelar situações complexas.

a) **Inteiras**: Quando o **período da taxa** e o **período da renda** coincidem.

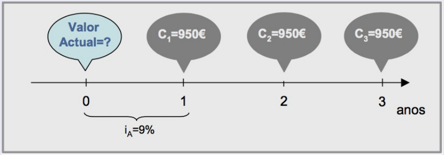
b) **Fraccionadas:** Período da taxa superior ao período da renda.
Ex.: Empréstimos à habitação, taxa anual e prestações mensais



- Muitas vezes, queremos saber o **valor actual** de uma renda, no *momento 0*.
- Idem, o **valor acumulado** no final do prazo.
- Por vezes também, valores intermédios.

Exemplo (Ex. 3.1)

O João comprou um iPad, pagável em três prestações anuais de 950,00€ cada (inclui juros). Taxa de 9% ao ano. Se o João quisesse pagar o computador, na sua totalidade, no momento da compra, quanto deveria ter desembolsado?



1. Valor Actual, A: No momento da compra, quanto gastaria?

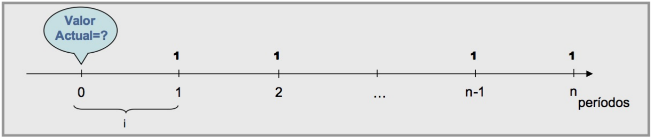
$$\begin{aligned} A &= 950(1,09)^{-1} + 950(1,09)^{-2} + 950(1,09)^{-3} \\ &= 950,00\left[(1,09)^{-1} + (1,09)^{-2} + (1,09)^{-3}\right] \\ &= 871,56€ \ + 799,60€ \ + 733,57€ \ = 2404,73€ \end{aligned}$$

2. Valor Acumulado, S: No final da operação quanto pagou?

$$\begin{aligned} S &= 950(1+0.09)^2 + 950(1+0.09) + 950 \\ &= 950\left[(1.09)^2 + (1.09)^1 + 1\right] \\ &= 1128.7€ \ + 1035.5€ \ + 950€ \ = 3114.2€ \end{aligned}$$

- Qdo o número de termos é reduzido (e iguais) é fácil calcular.
- Não será se houver mensalidades em 25 anos (e variávais). ...Excel!
- Nalguns casos é fácil deduzir uma fórmula de aplicação simples e rápida: Por ex: termos constantes.

Rendas de termos normais. Valor actual, $A = a_{\overline{n}|i}$

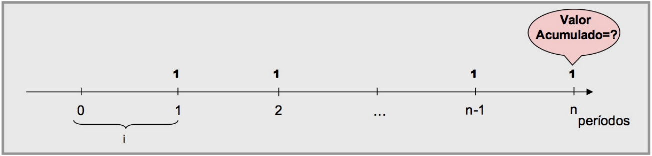


$$
\begin{aligned}
A &= 1 \times (1+i)^{-1} + 1 \times (1+i)^{-2} + ... + 1 \times (1+i)^{-n} \\
a_{\overline{n}|i} &= 1\left[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + ... + (1+i)^{-n}\right] \\
a_{\overline{n}|i} &= v + v^2 + ... + v^n.
\end{aligned}
$$

Soma de progressão geométrica de razão $r = v = (1+i)^{-1}$:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{u_1 - u_n \times r}{1 - r} = \frac{v - v^n v}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{1/v - 1} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Rendas de termos normais. Valor acumulado, $S = s_{\overline{n}|i}$



$$\begin{aligned} s_{\overline{n}|i} &= (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + ... + (1+i)^2 + (1+i) + 1 \\ &= 1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \end{aligned}$$

De trás para frente: progressão geométrica de 1^o termo 1 e razão $r = (1+i)$,

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{n-1}\times(1+i)}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^n}{-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Expressões gerais: Renda de **termos constantes**, T, e **normais**

$$\textbf{Valor Actual}: \; T\, a_{\overline{n}|i} = \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) T$$

$$\textbf{Valor Acumulado}: \; T\, s_{\overline{n}|i} = \left(\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right) T$$

$$\Rightarrow \quad s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^{n}$$

Exemplo (Ex. 3.1 [cont.])

$T = 950$, $i = 0.09$.

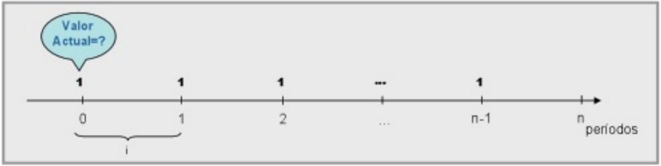
$$950\, a_{\overline{n}|i} = 950\frac{1-(1.09)^{-3}}{0.09} = 2404.7.$$

$$950 s_{\overline{n}|i} = 950\frac{(1.09)^{3}-1}{0.09} = 3114.20$$

$$\Rightarrow \quad 3114.20 = 2404.73\,(1.09)^{3}$$

Rendas de Termos Antecipados

O vencimento dos termos fixa-se no início de cada período.

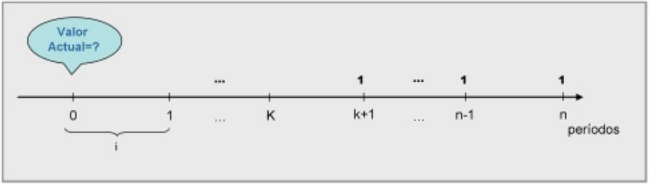


$$\textbf{Valor Actual}: \ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)$$

$$\textbf{Valor Acumulado}: \ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i)$$

Rendas Diferidas

A 1ª prestação vence-se num período posterior ao qual se pretende calcular o valor actual.

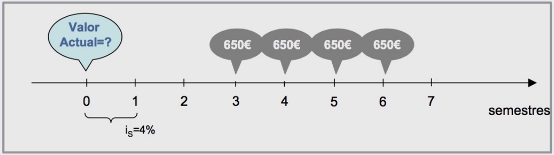


$$\textbf{Valor Actual}, A: \; {}_{k|}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^{-k}$$

$$\textbf{Valor Acumulado}, S: \; {}_{k|}s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} \quad \text{(sem alteração)}$$

Exemplo (Ex. 3.4)

O Tomás comprou um computador, pagável em 4 prestações semestrais de €650,00 cada (no final de cada sem. incl. juros). 1º pagamento daqui a 3 semestres, financiamento da compra à taxa de 4% ao semestre.
Se pretender pagar o computador, no momento da compra, quanto desembolsaria?



$$V.A. = \ {}_{2|}a_{\overline{4|}4\%}650 = 650a_{\overline{4|}0.04}\left(1.04\right)^{-2} = 2181.43€$$

V.A. de Renda finita: $a_{\overline{n}|i}$

Renda perpétua

Renda com um número infinito de termos. Valor Actual: $a_{\overline{\infty}|i}$

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) = \frac{1}{i}$$

Exemplo (Ex. 3.5)

A Perpétua foi estudar para Lisboa, onde pensa ficar a residir. $i_A = 0.05$. *Opções: a) Arrendar, €850/mês; b) Comprar, €127 500.* **Valor Actual** *do arrendamento:*

$$\begin{aligned} i_M &= (1,05)^{1/12} - 1 = 0,00407 \to 0,4074\% \\ 850\, a_{\overline{\infty}|i_M} &= 208640,16€ > 127500€ \end{aligned}$$

- Se os termos são variáveis e sem qualquer *padrão matemático* calcula-se o valor actual/acumulado somando um a um os valores actuais ou acumulados.
- Se os termos variarem em progressão, artimética ou geométrica, é possível abreviar o cálculo.

Termos em progressão aritmética crescente:

Exemplo (Ex. 3.7)

O João comprou um computador pagável em 3 prestações normais anuais, de €950, €1000 e €1050 (inc. juros). O crédito é financiado à taxa de 9% ao ano. A pronto quanto pagaria?

$$\begin{aligned} V.A. &= 950,00(1,09)^{-1} + 1000,00(1,09)^{-2} + 1050,00(1,09)^{-3} \\ &= 2524,03€ \end{aligned}$$

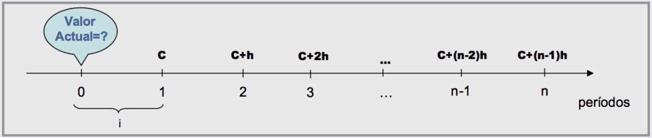
Exemplo (Ex. 3.7, cont.)

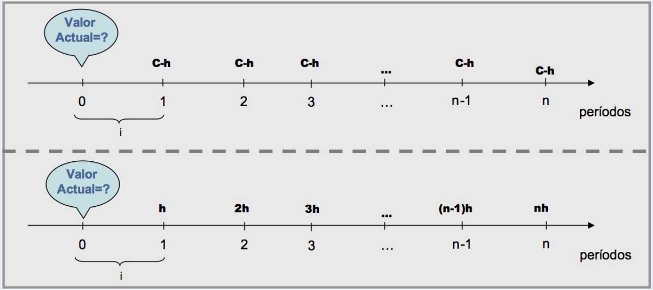
Progressão aritmética crescente com razão $h = 50$.

V. Actual $=$

$$
\begin{array}{llllll}
= & 950{,}00(1{,}09)^{-1} & + & 1000{,}00(1{,}09)^{-2} & + & 1050{,}00(1{,}09)^{-3} = 2524{,}03€ \\
\hline
= & 900(1{,}09)^{-1} & + & 900(1{,}09)^{-2} & + & 900(1{,}09)^{-3}+ \\
+ & 50(1{,}09)^{-1} & + & 50(1{,}09)^{-2} & + & 50(1{,}09)^{-3}+ \\
 & & + & 50(1{,}09)^{-2} & + & 50(1{,}09)^{-3}+ \\
 & & & & + & 50(1{,}09)^{-3} = 2524{,}03€ \\
\hline
= & 900a_{\overline{3}|9\%} & + & & & \\
+ & 50a_{\overline{3}|9\%} & + & 50_{1|}a_{\overline{2}|9\%} & + & 50_{2|}a_{\overline{1}|9\%} = 2524{,}03€ \\
\hline
= & 2524{,}03€ & & & &
\end{array}
$$

Progressão aritmética crescente com razão **h**





Progressão aritmética crescente com razão h, **Valor Actual**:

$$= \quad Cv + (C+h)v^2 + (C+2h)\,v^3 + \ldots + [C + (n-1)\,h]\,v^n$$

$$\begin{aligned} = \quad & (C-h)\,v + (C-h)v^2 + (C-h)\,v^3 + \ldots + (C-h)\,v^n + \\ & + hv + 2hv^2 + 3hv^3 + \ldots + (n-1)\,hv^{n-1} + nhv^n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llllllll} = & \multicolumn{7}{l}{(C-h)\,v + (C-h)v^2 + (C-h)\,v^3 + \ldots + (C-h)\,v^n +} \\ & +hv & +hv^2 & +hv^3 & +\ldots & +hv^{n-1} & +hv^n & + \\ & & +hv^2 & +hv^3 & +\ldots & +hv^{n-1} & +hv^n & + \\ & & & +hv^3 & +\ldots & +hv^{n-1} & +hv^n & + \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & + \\ & & & & & +hv^{n-1} & +hv^n & + \\ & & & & & & +hv^n & = \end{array}$$

$$\begin{aligned} = \quad & (C-h)\,a_{\overline{n}|i} + h\left(a_{\overline{n}|i} +_{1|}\, a_{\overline{n-1}|i} +_{2|}\, a_{\overline{n-2}|i} + \ldots +_{n-1|}\, a_{\overline{1}|i}\right) \\ = \quad & (C-h)\,a_{\overline{n}|i} + h.\,(Ia)_{\overline{n}|i} \end{aligned}$$

Renda com termos em progressão aritmética crescente

$$\begin{aligned} &= (C-h)\, a_{\overline{n}|i} + h\left(a_{\overline{n}|i} + {}_{1|}\, a_{\overline{n-1}|i} + {}_{2|}\, a_{\overline{n-2}|i} + \ldots + {}_{n-1|}\, a_{\overline{1}|i}\right) = \\ &= (C-h)\, a_{\overline{n}|i} + \mathbf{h}.\, (\mathbf{Ia})_{\overline{n}|\mathbf{i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Ia)_{\overline{n}|i} &= a_{\overline{n}|i} + {}_{1|}\, a_{\overline{n-1}|i} + {}_{2|}\, a_{\overline{n-2}|i} + \ldots + {}_{n-1|}\, a_{\overline{1}|i} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

- Se $C = h$: Valor Actual $= h \cdot (Ia)_{\overline{n}|i}$

Renda com termos em progressão aritmética crescente

$$
\begin{aligned}
&= (C-h)\, a_{\overline{n}|i} + h\left(a_{\overline{n}|i} + {}_{1|}\, a_{\overline{n-1}|i} + {}_{2|}\, a_{\overline{n-2}|i} + \ldots + {}_{n-1|}\, a_{\overline{1}|i}\right) = \\
&= (C-h)\, a_{\overline{n}|i} + \mathbf{h}.\, (\mathbf{Ia})_{\overline{n}|\mathbf{i}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(Ia)_{\overline{n}|i} &= a_{\overline{n}|i} + {}_{1|}\, a_{\overline{n-1}|i} + {}_{2|}\, a_{\overline{n-2}|i} + \ldots + {}_{n-1|}\, a_{\overline{1}|i} \\
&= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i}
\end{aligned}
$$

- Se $C = h$: Valor Actual $= h \cdot (Ia)_{\overline{n}|i}$
- Se $C = h$ e $h = 1$: Valor Actual $= (Ia)_{\overline{n}|i}$

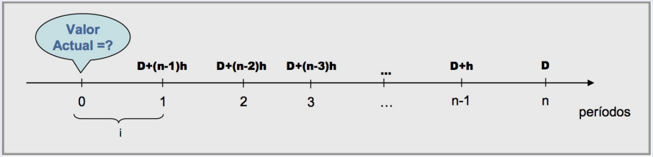
Termos em progressão aritmética decrescente:

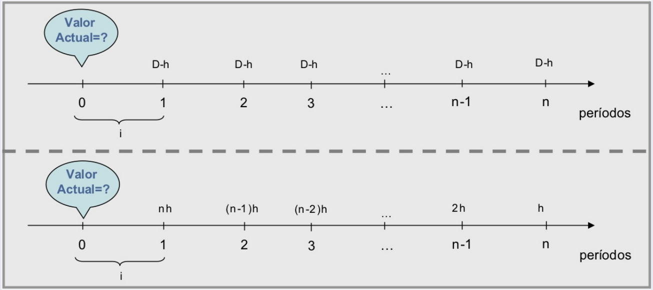
Exemplo (Ex. 3.8)

A Eduarda comprou um iPod pago em 4 mensalidades normais de 35, 30, 25 e 20€. $i_M = 0,012$. *V.Actual* $(h = -5)$:

$$
\begin{array}{llllll}
 & 35(1{,}012)^{-1} & +30(1{,}012)^{-2} & +25(1{,}012)^{-3} & +20(1{,}012)^{-4} & \\
\hline
= & 15(1{,}012)^{-1} & +15(1{,}012)^{-2} & +15(1{,}012)^{-3} & +15(1{,}012)^{-4} & + \\
+ & 5(1{,}012)^{-1} & +5(1{,}012)^{-2} & +5(1{,}012)^{-3} & +5(1{,}012)^{-4} & + \\
+ & 5(1{,}012)^{-1} & +5(1{,}012)^{-2} & +5(1{,}012)^{-3} & & + \\
+ & 5(1{,}012)^{-1} & +5(1{,}012)^{-2} & & & + \\
+ & 5(1{,}012)^{-1} & & & & + \\
\hline
= & 15a_{\overline{4}|1{,}2\%} & + & & & \\
+ & 5a_{\overline{4}|1{,}2\%} & +5a_{\overline{3}|1{,}2\%} & +5a_{\overline{2}|1{,}2\%} & +5a_{\overline{1}|1{,}2\%} & \\
\hline
= & 15a_{\overline{4}|1{,}2\%} & +5\left(\frac{4-a_{\overline{4}|1{,}2\%}}{0{,}012}\right), & \textit{simplificando.} & &
\end{array}
$$

Termos em Progr. aritmética decrescente, razão h, último termo D





Renda em Prog. aritmética decrescente razão h e último termo D

$$\text{Valor Actual} = (D-h)\, a_{\overline{n}|i} + h \cdot (Da)_{\overline{n}|i}$$

$$(Da)_{\overline{n}|i} = nv + (n-1)v^2 + (n-2)\,v^3 + \ldots + 2v^{n-1} + v^n$$

$$= \begin{array}{ccccccc}
+v & +v^2 & +v^3 & +\ldots & +v^{n-1} & +v^n & + \\
+v & +v^2 & +v^3 & +\ldots & +v^{n-1} & & + \\
+v & +v^2 & +v^3 & +\ldots & & & + \\
\ldots & & & \ldots & \ldots & \ldots & + \\
+v & +v^2 & & & & & + \\
+v & & & & & & =
\end{array}$$

$$= a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n-1}|i} + \ldots + a_{\overline{3}|i} + a_{\overline{2}|i} + a_{\overline{1}|i}$$

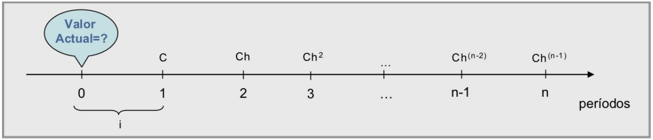
$$(Da)_{\overline{n}|i} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i}. \text{ (V.A. renda em prog.aritm. c/ } D = h = 1)$$

Termos em progressão geométrica

Exemplo (Ex. 3.9)

O João comprou um computador, pagável em três prestações anuais (c/ juros incl.), sendo a 1 ª igual a €950 e as restantes com um acréscimo de 25% relativamente à anterior. Taxa de juro anual constante, $i_A = 9\%$. *Valor Actual:*

$$\begin{aligned} V.A. &= 950(1,09)^{-1} + 950 \times 1.25(1,09)^{-2} + 950 \times 1.25^2(1,09)^{-3} \\ &= 3017,26€ \end{aligned}$$



- 1^o termo C, razão h.
- Se $h > 1$, a renda é crescente;
- Se $0 < h < 1$, renda é decrescente.
- V. Actual: Soma da progressão geométrica de razão hv,

$$\begin{aligned} \text{V.A.} &= Cv + Chv^2 + Ch^2v^3 + \ldots + Ch^{n-1}v^n \\ &= C\frac{v - h^{n-1}v^n \times hv}{1 - hv} = C\left(\frac{v(1-h^nv^n)}{v(1/v-h)}\right) \\ &= C\left(\frac{1-\left(\frac{h}{1+i}\right)^n}{1+i-h}\right) \end{aligned}$$

Muitas vezes, na literatura financeira aparece $h = 1 + r$, $(r > -1)$, r é uma taxa de crescimento. Nesse caso:

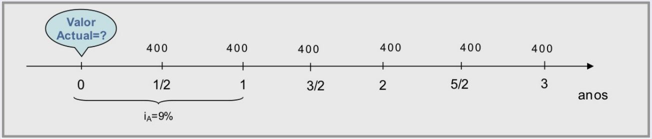
1^o termo C, razão $h = (1 + r)$

$$V.A. = C\left(\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r}\right)$$

Renda Fraccionada

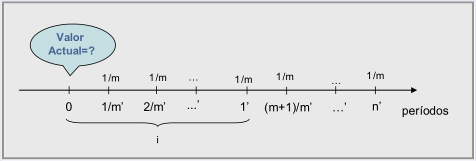
Renda em que o Período da taxa superior é ao Período da renda

Exemplo



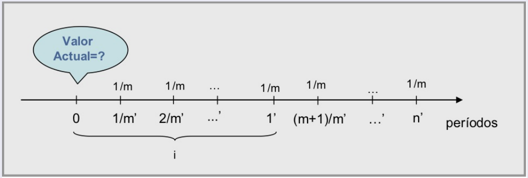
Renda fraccionada, com sub-divisão *m*

Período c/ termo 1, é sub-dividido em m sub-períodos e termo $1/m$:



Renda fraccionada, com sub-divisão m

Cada Período c/ termo **1**, é sub-dividido em $\underline{m}$ sub-períodos e termo $1/m$:



- O período da taxa mantém-se, seja i_A (como se fosse o ano).
- A renda tem $n \times m$ termos, cada termo $1/m$
- Valor Actual, $a^{(m)}_{\overline{n}|i}$ (prog. geométrica com razão $v^{1/m}$):

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \frac{1}{m}v^{3/m} + \ldots + \frac{1}{m}v^{n}$$

V.A. (Soma de uma progressão geométrica com razão $v^{1/m}$)

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|i}^{(m)} &= \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \frac{1}{m}v^{3/m} + \ldots + \frac{1}{m}v^{n} \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{v^{1/m} - v^{n} \times v^{1/m}}{1 - v^{1/m}}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{v^{1/m}\left(1 - v^{n}\right)}{v^{1/m}\left(v^{-1/m} - 1\right)}\right) \\
&= \frac{1}{m}\left(\frac{1 - v^{n}}{v^{-1/m} - 1}\right) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i^{(m)}}
\end{aligned}
$$

Como $i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$, tx nominal anual convertível ...

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|i}^{(m)} &= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = a_{\overline{n}|i}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right) \\
T\,a_{\overline{n}|i}^{(m)} &= T\,a_{\overline{n}|i}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right); \quad T\,s_{\overline{n}|i}^{(m)} = T\,s_{\overline{n}|i}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right).
\end{aligned}
$$

Em resumo:

Método 1

$$a_{\overline{n|}i}^{(m)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}}\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = a_{\overline{n|}i}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right)$$

$$T\, a_{\overline{n|}i}^{(m)} = T\, a_{\overline{n|}i}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right); \quad T\, s_{\overline{n|}i}^{(m)} = T\, s_{\overline{n|}i}\left(\frac{i}{i^{(m)}}\right).$$

Podemos calcular a taxa equivalente à sub-subdivisão $1/m$:

Método 2

$$T\, a_{\overline{n|}i_A}^{(m)} = \frac{T}{m}\, a_{\overline{m\times n|}i_m}$$

$$(1+i_A) = (1+i_m)^m \Leftrightarrow (1+i_A)^{1/m} = (1+i_m).$$

Exemplo (Ex. 3.10)

Dívida pagável em 3 anos, 800€/ano, em 6 prestações semestrais normais de 400€ cada. Calcule o V. Actual, $i_A = 0.09$.

1. *Transformar a taxa anual em tx. equiv. semestral e:*

$$\begin{aligned} i_S &= (1+i_A)^{1/2} - 1 = 0,044031; \\ \text{V.A.} &= 400 a_{\overline{2\times 3}|i_S} = 400 \frac{1 - 1,044031^{-6}}{0,044031} = 2069,62€ \end{aligned}$$

2. *Fazer o cálculo como renda fraccionada,* $i_A^{(2)} = 0,088061$:

$$\text{V.A.} = 800 a^{(2)}_{\overline{3}|i_A} = 800 \frac{1 - 1,09^{-3}}{0,09} \frac{0,09}{0,088061} = 2069,62€$$

3. *Qualquer dos métodos é bom, utiliza-se o que for mais rápido/eficiente.*

Calcular o saldo durante o prazo de um empréstimo com Prestações constantes, T, prazo n, momento $k : 0 \leq k \leq n$:

Método prospectivo

Calcular o valor actual, em k, dos pagamentos restantes:

$$C_k = T \, a_{\overline{n-k|}i}$$

Método retrospectivo

Calcular a diferença, em k, entre o valor do empréstimo concedido e os pagamentos efectuados:

$$C_k = C_0(1+i)^k - T \, s_{\overline{k|}i}$$

Exemplo (**Avaliação de Participações**. Um modelo elementar)

Uma Acção/Quota é uma participação no capital de uma empresa. Quanto vale para ser transacionado? Um valor (especulativo) da bolsa de valores, se for cotado.

- O detentor de uma Acção tem como contrapartida, enquanto detentor, o(s) dividendo(s) que pode gerar anualmente. Depois... poderá sempre negociar...
- Hipóteses (simplistas):
  1. O dividendo no próximo ano estimou como sendo k;
  2. *Estima* uma tx de crescimento anual do dividendo, r; A tx de juro para actualização é i.
- Valor Actual (*Preço teórico da Acção*) de perpetuidade:

$$\text{V.A.} = k\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+r}{(1+i)^2} + \frac{(1+r)^2}{(1+i)^3} + \ldots\right] = \frac{k}{i-r}, \quad i > r$$

Exemplo (Ex. 7.1. V:A.L.- Valor Actual Líquido de investimento)

A empresa de cortiças ABCork está a ponderar efectuar um investimento numa nova linha de montagem, cujo investimento global ascende a €207 500, e que terá uma vida útil estimada de 8 anos.
Tendo em consideração as previsões efectuadas quanto às receitas e despesas de exploração que aquela nova linha produtiva irá registar, pretende-se analisar financeiramente este projecto de investimento através do método do VAL, utilizando a taxa de actualização de 6%, de forma a tomar uma decisão quanto à implementação ou abandono do projecto.

Exemplo (Ex. 7.1, V.A.L.(cont.))

Anos	Investimento (I_k)	Receitas de Exploração (R_k)	Despesas de Exploração (D_k)	Valor Residual do Investimento (Vr)
0	207 500,00 €	-	-	-
1	-	35 000,00 €	12 500,00 €	-
2	-	49 000,00 €	15 600,00 €	-
3	-	52 000,00 €	16 400,00 €	-
4	-	56 000,00 €	17 500,00 €	-
5	-	64 000,00 €	19 000,00 €	-
6	-	65 000,00 €	19 300,00 €	-
7	-	67 000,00 €	19 800,00 €	-
8	-	69 000,00 €	20 500,00 €	77 500,00 €

$$
\begin{aligned}
VAL &= -Investimento + VA\ Cash - FlowsAcum. + V.R. \\
VAL &= -207500 + 239001,9 + 77500(1,06)^{-8} = 80133,60\ (>0)
\end{aligned}
$$

Exemplo (Ex. 7.1 (cont.). V.A.L. e T.I.R.)

- *Se* $V.A.L. > 0$, *projecto tem viabilidade;*
- *Se* $V.A.L. = 0 \Rightarrow VAL = T.I.R.(IRR)$;
- *Se* $V.A.L. < 0$, *projecto inviável;*

$$\begin{aligned} VAL &= -Investimento + VA\ Cash - FlowsAcum. + V.R. \rightarrow \\ &\quad (valores\ actualizados) \\ VAL &= -207500,00 + 239001,90 + 77500,00.(1,06)^{-8} \\ &= 80133,60€ \end{aligned}$$

$$T.I.R.,\ i : VAL = 0\ . \quad T.I.R. \approx 0.1308 \rightarrow 13,08\%$$

Exemplo (Depreciação/Amortização de um Activo. Um modelo)

Um activo de uma empresa, um automóvel por exemplo, sofre usura, depreciação ao longo dos anos. Para efeitos fiscais, são considerados custos, fazem-se ***amortizações anuais****.*

- Taxa Constante
  - Sequencia de valores: $P_0, P_1, ..., P_n$ (valor residual).
  - Depreciação à taxa d: $D_t = P_{t-1} - P_t =. \; P_{t-1} \times d$.
  - $P_t =. \; P_{t-1}(1-d) = P_0(1-d)^t$.
  - $D_t = P_{t-1} \times d = P_0(1-d)^{t-1}d, \; t = 1, ..., n$.
- Amortização constante
  - Valor amortizável: $P_0 - P_n$ (valor residual).
  - Amortização anual: $D_t = \frac{1}{n}(P_0 - P_n), \; t = 1, ..., n-1$.

Outras aplicações

4. Reembolso de empréstimos

4.1 Modalidades de reembolso de capital e pagamento de juros

4.2 Quadros de amortização

3. Rendas Certas