Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, $int(A) \subseteq A \subseteq ad(A)$.

Dem.

• $int(A) \subseteq A$?

Seja $x \in int(A)$. Por definição de ponto interior,

$$\exists \epsilon > 0 :]x-\epsilon, x+\epsilon[\subseteq A.$$

Como, para todo $\epsilon > 0$, $x \in]x-\epsilon, x+\epsilon[$ obtemos $x \in A$ e logo $int(A) \subseteq A$.

• $A \subseteq ad(A)$?

Seja $x \in A$ e suponhamos, com vista a um absurdo, que $x \notin ad(A)$. Como $\mathbb{R} = ad(A) \cup ext(A)$, se $x \notin ad(A)$ então temos que ter $x \in ext(A)$. Por definição de ponto exterior,

$$\exists \epsilon > 0 :]x-\epsilon, x+\epsilon[\subseteq \mathbb{R} \backslash A.$$

Logo, como, para todo $\epsilon > 0$, $x \in]x-\epsilon, x+\epsilon[$ obtemos $x \in \mathbb{R} \backslash A$ e chegamos a um absurdo (por hipotese tinhamos que $x \in A$.)

Logo $x \in ad(A)$ e concluímos que $A \subseteq ad(A)$.

Para pensar: Tente provar que:

• A é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R} \backslash A$ é um conjunto fechado.