

# Mestrados

Métodos Quantitativos para DEE

2018/2019

Leonor Santiago Pinto  
Gab 506 Quelhas  
Telef 213 925 845  
Email: [lpinto@iseg.ulisboa.pt](mailto:lpinto@iseg.ulisboa.pt)

## Aula 8

Dualidade - interpretação económica.  
Relações de complementaridade.

STFA

Dorian auto, completar com dualidade

**Trabalhos!**



- O dual do dual é o primal
- Dado um par de problemas duais, se um dos problemas tiver solução ótima então o outro também tem e ambos têm o mesmo valor ótimo ( $z^*=w^*$ )
- Se existir uma solução admissível do primal ( $x'$ , com valor da f.o.  $z'$ ) e uma solução admissível do dual ( $y'$ , com valor da f.o.  $w'$ ) tem-se  $z' \leq w'$ . Se  $z'=w'$ , então ambas são soluções ótimas do respetivo problema.
- Dado um par de problemas duais, se um dos problemas for ilimitado então o outro é impossível.

Dual \ Primal	tem s.a.	não tem s.a.
tem s.a.	Os dois problemas têm s.o. e $z^*=w^*$	Primal impossível Dual ilimitado
não tem s.a.	Primal ilimitado Dual impossível	Primal impossível Dual impossível



**Def.** Dado (P), o **preço sombra** da restrição  $i$  de (P) é a proporção de variação no valor ótimo, em função do acréscimo do 2º membro da restrição  $i$ , ou seja, num problema de análise de atividades é o valor marginal do recurso  $i$ .

**Prop.** O preço sombra da restrição  $i$  (shadow price) é o valor da variável de decisão na solução ótima do dual ( $y_i^*$ ).

**Def.** As soluções dum par de problemas duais ( $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ ) verificam as **relações de complementaridade** sempre que

(i) Se a  $k$ -ésima restrição dum dos problemas for não saturada, então a  $k$ -ésima variável do seu dual é nula e

(ii) se a  $k$ -ésima variável de decisão de um dos problemas for não nula, então a  $k$ -ésima restrição do seu dual é saturada.

**Prop.** Sejam  $\mathbf{x}$  s.a. de (P) e  $\mathbf{y}$  s.a. de (D).

$\mathbf{x}$  é s.o. de (P) e  $\mathbf{y}$  é s.o. de (D)

sse

$\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  verificam a relações de complementaridade.

# Resolver o dual



Diretamente, como qualquer PL

ou

A partir da resolução do primal com o *Solver*

( $y_i^*$  = preço sombra (shadow price) do recurso  $i$ )

ou

Se conhecer a s.o. do primal, através de relações de complementaridade

ou ainda,

se o primal tiver sido resolvido graficamente, usando a resolução gráfica do primal

( $y_i^*$  = proporção de variação no valor ótimo, em função do acréscimo do 2º membro da restrição  $i$ )



## Protótipo 1. Problema da Giapetto.

A Giapetto é uma empresa que produz vários brinquedos em madeira e vai iniciar a produção de dois novos brinquedos: soldados e comboios.

Semanalmente, é possível adquirir toda a matéria-prima necessária para os brinquedos, mas só estão disponíveis 100 horas para acabamentos em verniz, 40 horas para acabamentos em tinta acrílica e 200 horas de carpintaria.

Um soldado necessita de 2 horas de acabamento em verniz e 2 de carpintaria, dando um lucro de **3**.

Cada comboio requer 1 hora de acabamento em tinta acrílica e 4 de carpintaria, sendo **2** o seu lucro.

Toda a produção tem venda assegurada.

A Giapetto pretende maximizar o lucro semanal obtido com a produção destes brinquedos.

# Formulação



$x_1$ - nº de soldados a produzir semanalmente

$x_2$ - nº de comboios a produzir semanalmente

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \\ & x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Lucro semanal

Horas disponíveis por semana na seção de verniz

Horas disponíveis por semana na seção de t. acrílica

Horas disponíveis por semana na seção de carpintaria





# PL – resolução no Solver

Microsoft Excel 14.0 Answer Report

Worksheet: [Book1]Sheet1

Report Created: 25-09-2015 19:03:39

Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

## Solver Engine

Engine: Simplex LP

Solution Time: 0,015 Seconds.

Iterations: 2 Subproblems: 0

## Solver Options

Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0,000001, Use Automatic Scaling

Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume NonNegative

## Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$6	lucro	200	200

## Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$C\$7	nº de soldados	50	50	Contín
\$D\$7	nº de comboios	25	25	Contín

## Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$3	horas ac. verniz	100	\$E\$3<=\$G\$3	Binding	0
\$E\$4	horas ac. tinta	25	\$E\$4<=\$G\$4	Not Binding	15
\$E\$5	horas carpintaria	200	\$E\$5<=\$G\$5	Binding	0



# PL – resolução no Solver

Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report

Worksheet: [Book1]Sheet1

Report Created: 25-09-2015 19:03:39

## Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$C\$7	nº de soldados	50	0	3	1E+30	2
\$D\$7	nº de comboios	25	0	2	4	2

## Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$3	horas ac. verniz	100	1	100	100	60
\$E\$4	horas ac. tinta	25	0	40	1E+30	15
\$E\$5	horas carpintaria	200	0,5	200	60	100



## Protótipo 2. Problema da Dorian Auto (Winston, 2004).

A Dorian Auto fabrica automóveis de luxo. Estudos prévios indicam que os potenciais clientes são sobretudo pessoas de classe alta. Para atingir este grupo, a Dorian Auto decidiu fazer uma ambiciosa campanha publicitária na TV, comprando anúncios de 1 minuto durante dois tipos de programa, comédias e jogos de futebol, que custarão \$50 000 e \$100 000 cada, respetivamente.

Cada comédia é vista por 7 milhões de mulheres e por 2 milhões de homens de classe alta; cada jogo de futebol é visto por 2 milhões de mulheres e 12 milhões de homens de classe alta.

A Dorian Auto pretende gastar o mínimo possível na campanha publicitária e de modo a que os anúncios sejam vistos por, pelo menos, 28 milhões de mulheres e 24 milhões de homens de classe alta.

Escreva e interprete o dual.



a) coeficientes da função objetivo  $c_j \rightarrow c_j + \Delta c_j$

Sem voltar a resolver o problema original, para que valores de  $\Delta c_j$  sabemos dizer exatamente quais as consequências no valor ótimo, por se ter feito tal alteração?

E quais as consequências na solução ótima?

b) segundos membros das restrições funcionais  $b_i \rightarrow b_i + \Delta b_i$

Sem voltar a resolver o problema original, para que valores de  $\Delta b_i$  sabemos dizer exatamente quais as consequências no valor ótimo, por se ter feito tal alteração?

E quais as consequências na solução ótima?