

Mestrados

Métodos Quantitativos para DEE

2018/2019

Leonor Santiago Pinto
Gab 506 Quelhas
Telef 213 925 845
Email: lpinto@iseg.ulisboa.pt

Aula 9 e 10

Análise de sensibilidade.

Exercícios.

STFA

Análise de sensibilidade aos parâmetros b_i e c_j Protótipo 2,
Problema da Dorian Auto.



PL – resolução no Solver

Microsoft Excel 14.0 Answer Report

Worksheet: [Book1]Sheet1

Report Created: 25-09-2015 19:03:39

Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

Solver Engine

Engine: Simplex LP

Solution Time: 0,015 Seconds.

Iterations: 2 Subproblems: 0

Solver Options

Max Time Unlimited, Iterations Unlimited, Precision 0,000001, Use Automatic Scaling

Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 1%, Assume NonNegative

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$6	lucro	200	200

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$C\$7	nº de soldados	50	50	Contín
\$D\$7	nº de comboios	25	25	Contín

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$3	horas ac. verniz	100	\$E\$3<=\$G\$3	Binding	0
\$E\$4	horas ac. tinta	25	\$E\$4<=\$G\$4	Not Binding	15
\$E\$5	horas carpintaria	200	\$E\$5<=\$G\$5	Binding	0



PL – resolução no Solver

Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report

Worksheet: [Book1]Sheet1

Report Created: 25-09-2015 19:03:39

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$C\$7	nº de soldados	50	0	3	1E+30	2
\$D\$7	nº de comboios	25	0	2	4	2

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$E\$3	horas ac. verniz	100	1	100	100	60
\$E\$4	horas ac. tinta	25	0	40	1E+30	15
\$E\$5	horas carpintaria	200	0,5	200	60	100



a) coeficientes da função objetivo $c_j \rightarrow c_j + \Delta c_j$

Sem voltar a resolver o problema original, para que valores de Δc_j sabemos dizer exatamente quais as consequências no valor ótimo, por se ter feito tal alteração?

E quais as consequências na solução ótima?

b) segundos membros das restrições funcionais $b_i \rightarrow b_i + \Delta b_i$

Sem voltar a resolver o problema original, para que valores de Δb_i sabemos dizer exatamente quais as consequências no valor ótimo, por se ter feito tal alteração?

E quais as consequências na solução ótima?



Análise de Sensibilidade

b) segundos membros das restrições funcionais

Admita-se que \mathbf{b}_i foi modificado para $\mathbf{b}_i + \Delta\mathbf{b}_i$.

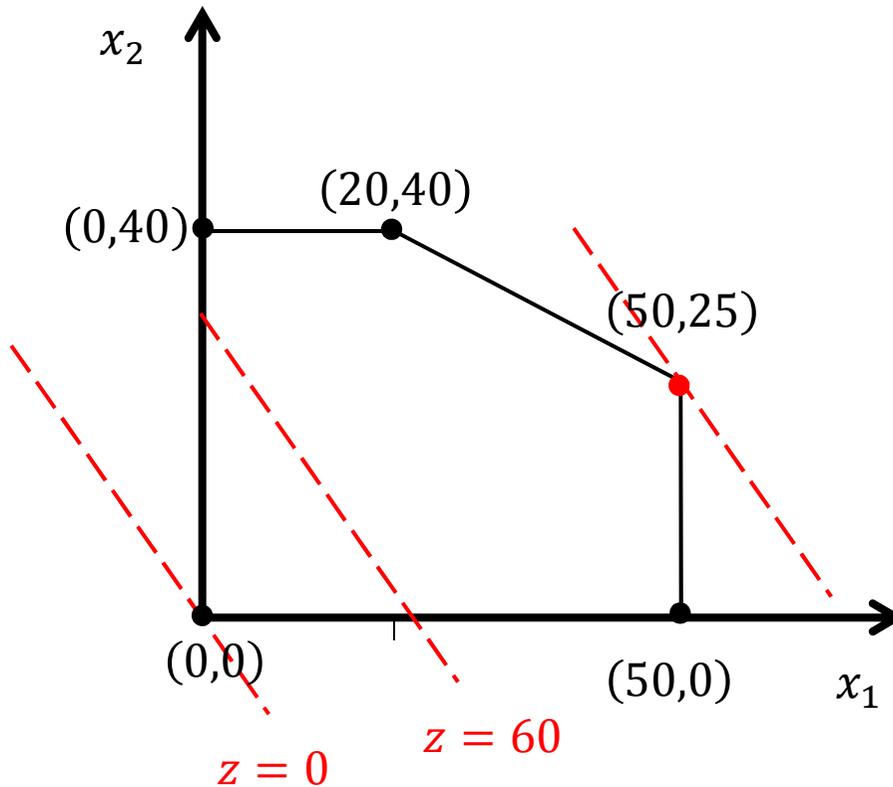
Sem voltar a resolver o problema original, para que valores de $\Delta\mathbf{b}_i$ sabemos dizer exatamente quais as consequências no valor ótimo, por se ter feito tal alteração?

E quais as consequências na solução ótima?

Problema da Giapetto – Resolução gráfica

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

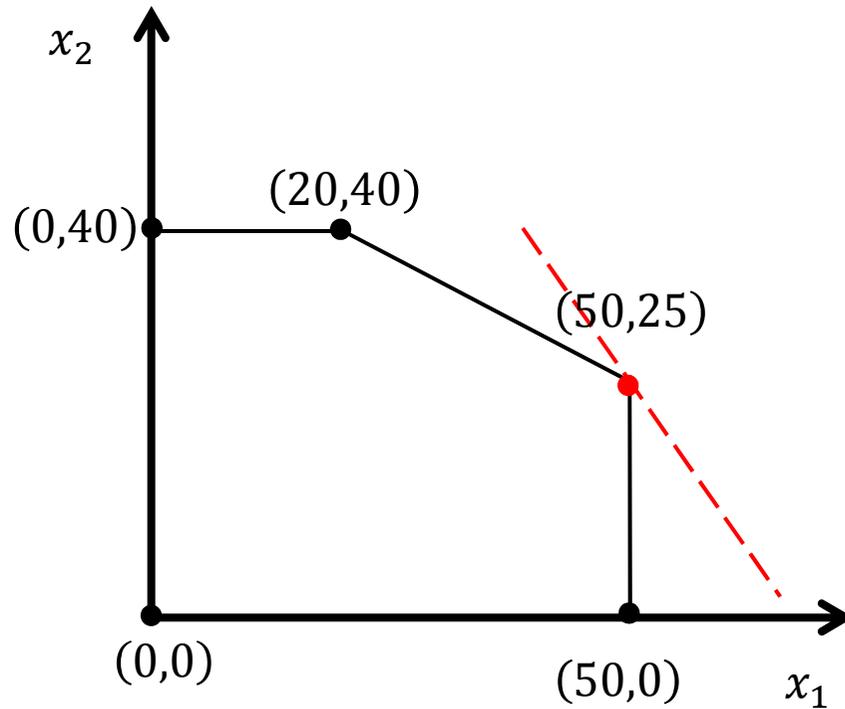
$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \\ & x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



Problema da Giapetto – análise sensibilidade b_1

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

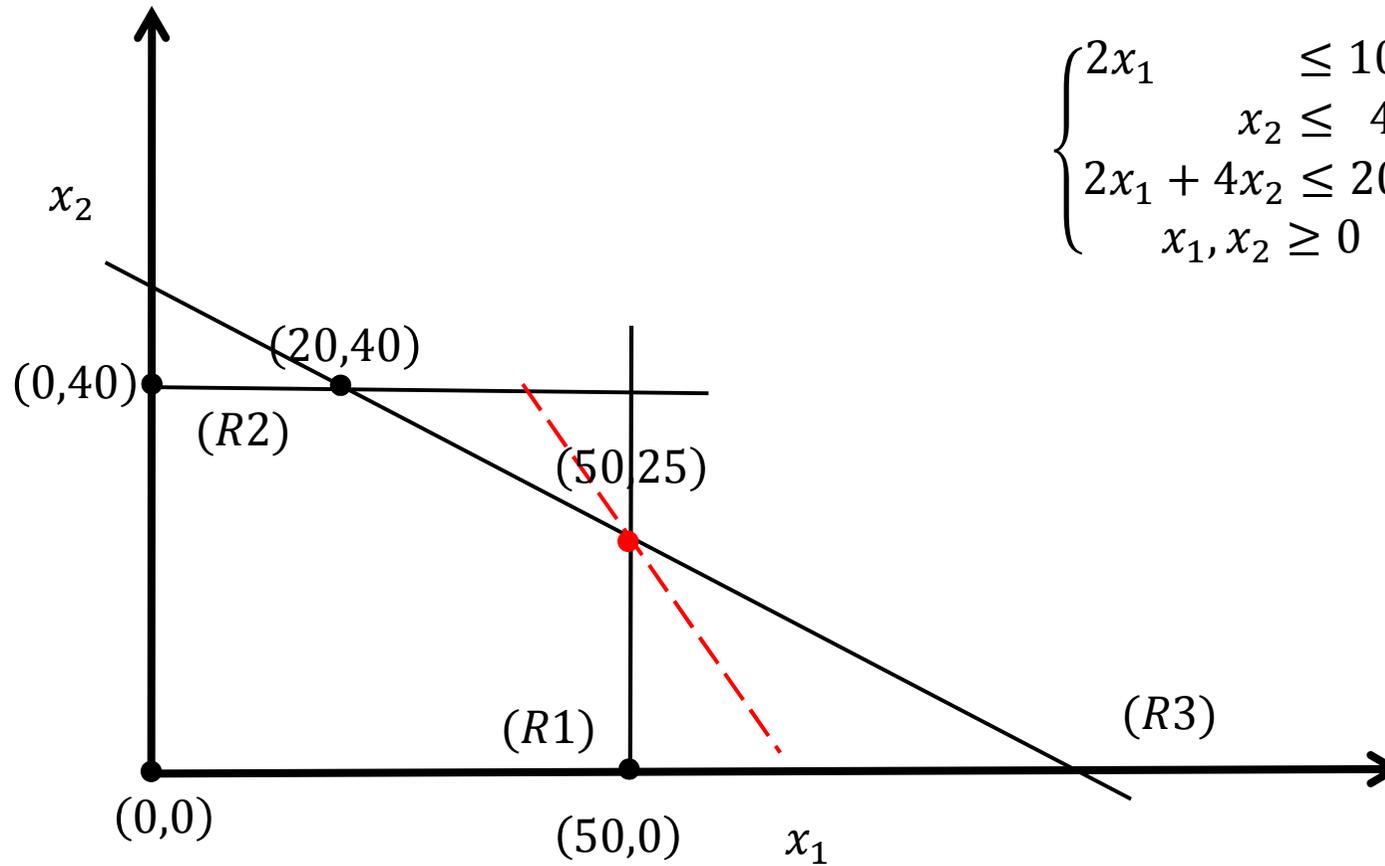
$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \\ & x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



Problema da Giapetto – análise sensibilidade b_1

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

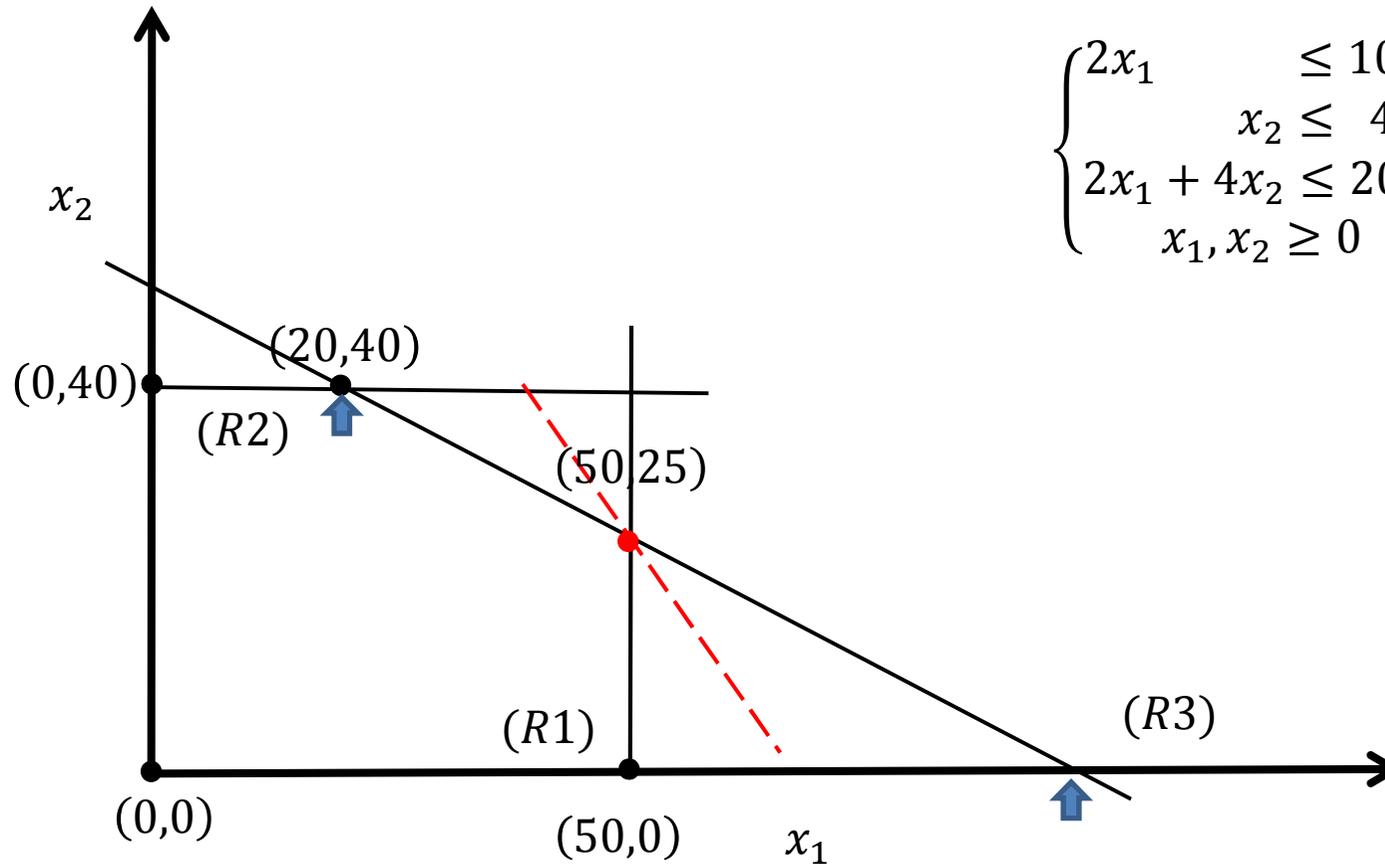
$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \text{ (R1)} \\ & x_2 \leq 40 \text{ (R2)} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \text{ (R3)} \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



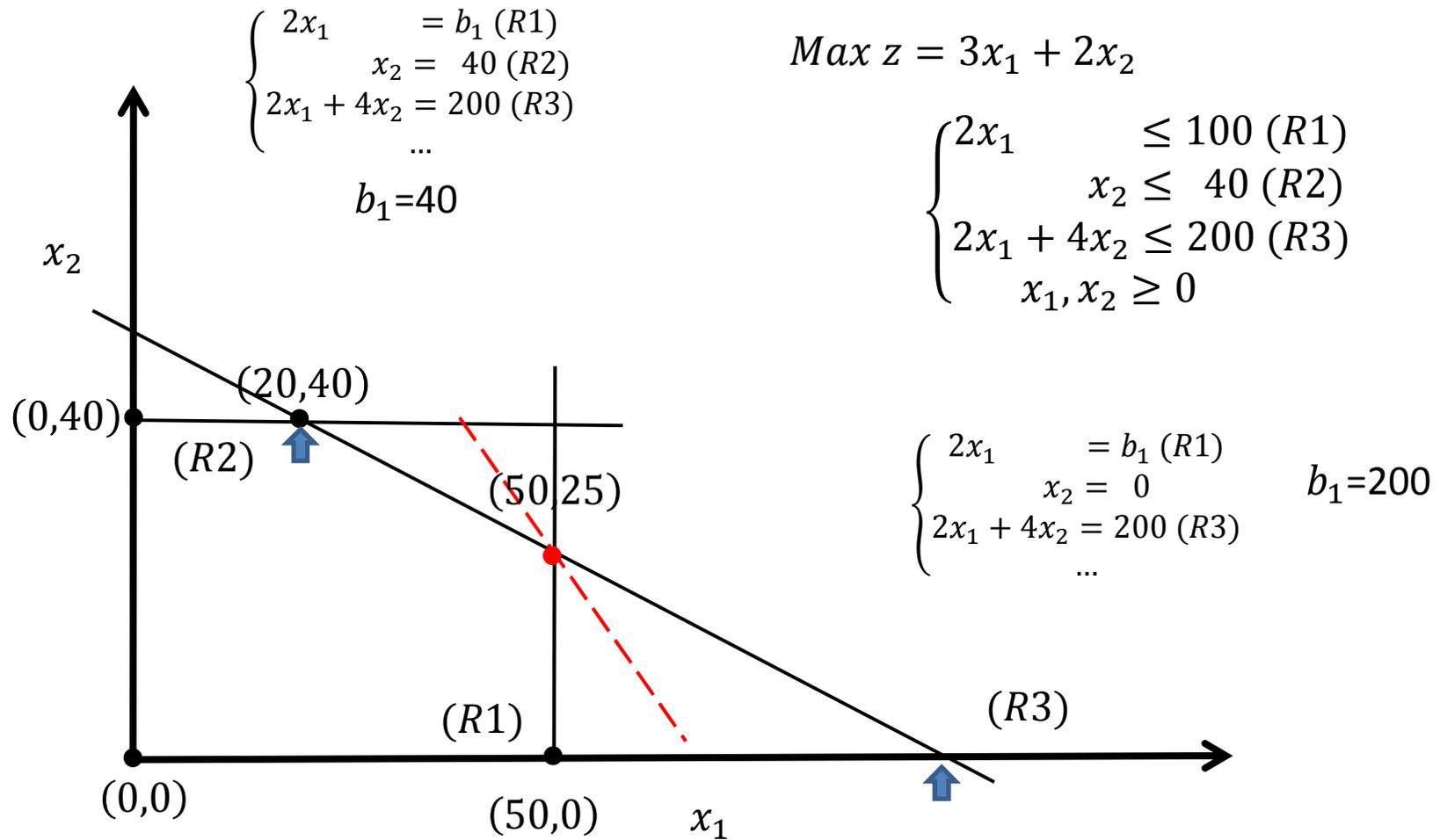
Problema da Giapetto – análise sensibilidade b_1

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \text{ (R1)} \\ & x_2 \leq 40 \text{ (R2)} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \text{ (R3)} \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



Problema da Giapetto – análise sensibilidade b_1



$$40 \leq b_1 \leq 200$$

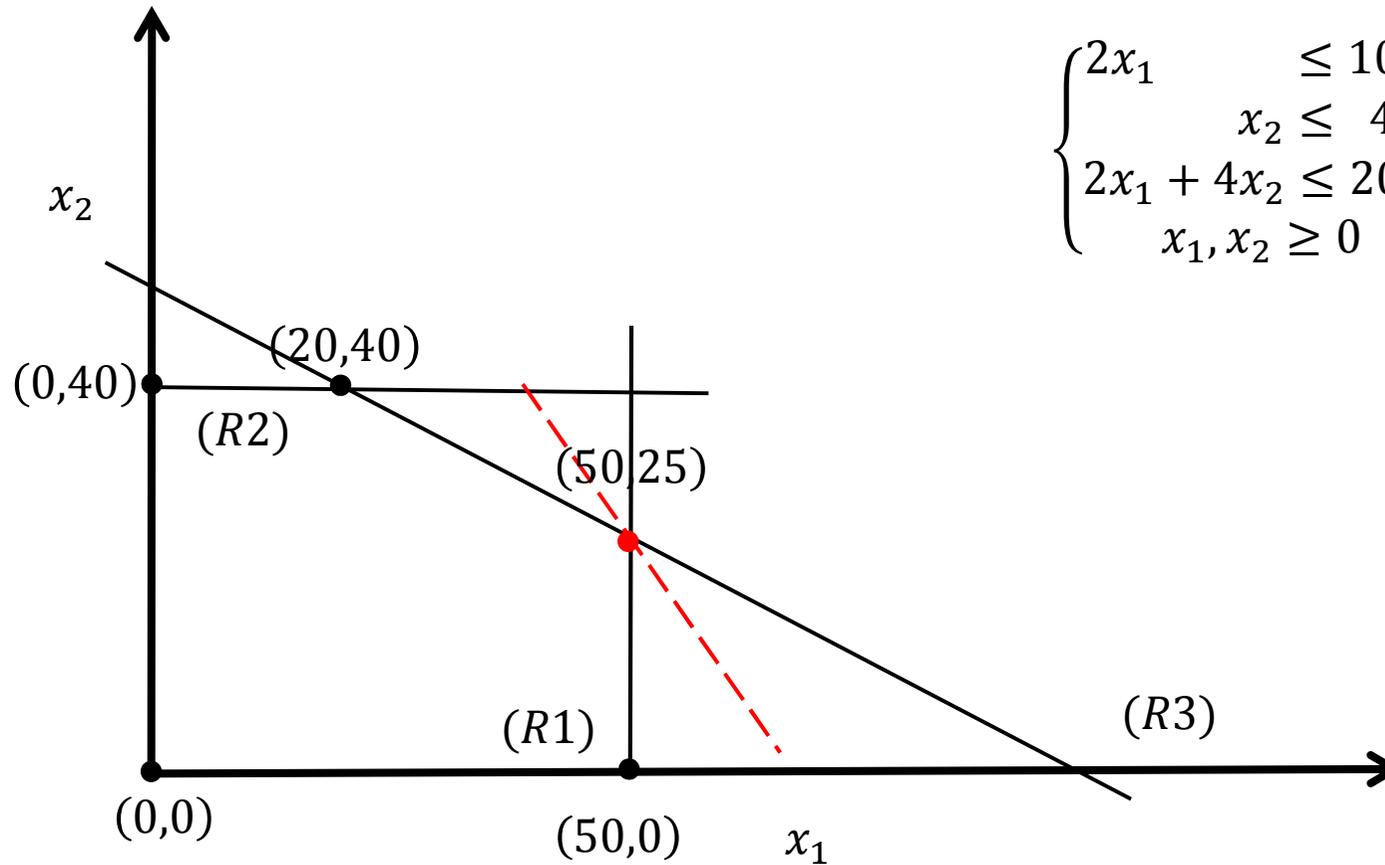
$$-60 \leq \Delta b_1 \leq 100$$

Dentro deste intervalo o
preço sombra mantém-se

Problema da Giapetto – análise sensibilidade b_2

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

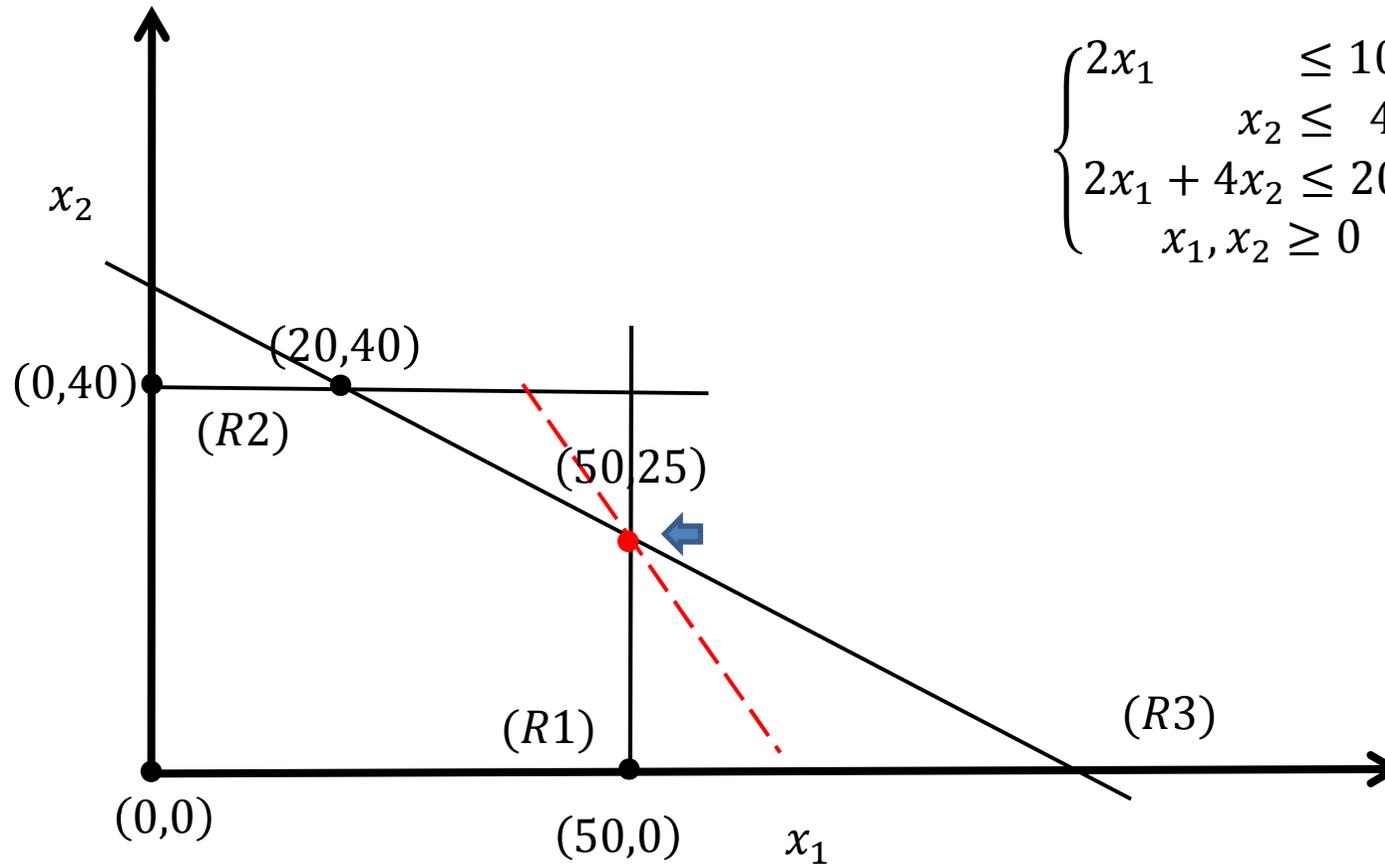
$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \text{ (R1)} \\ & x_2 \leq 40 \text{ (R2)} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \text{ (R3)} \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



Problema da Giapetto – análise sensibilidade b_2

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

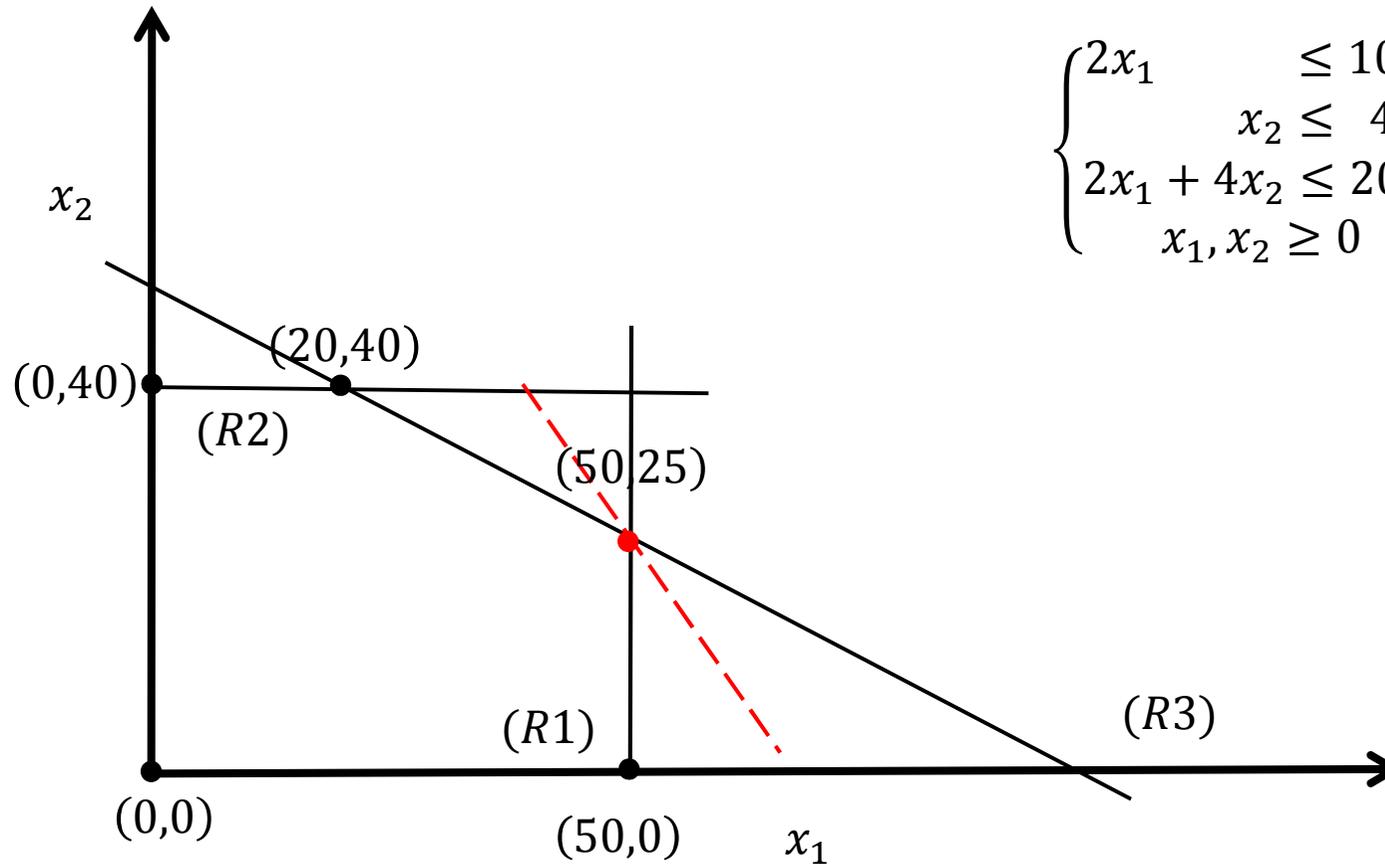
$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \text{ (R1)} \\ & x_2 \leq 40 \text{ (R2)} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \text{ (R3)} \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



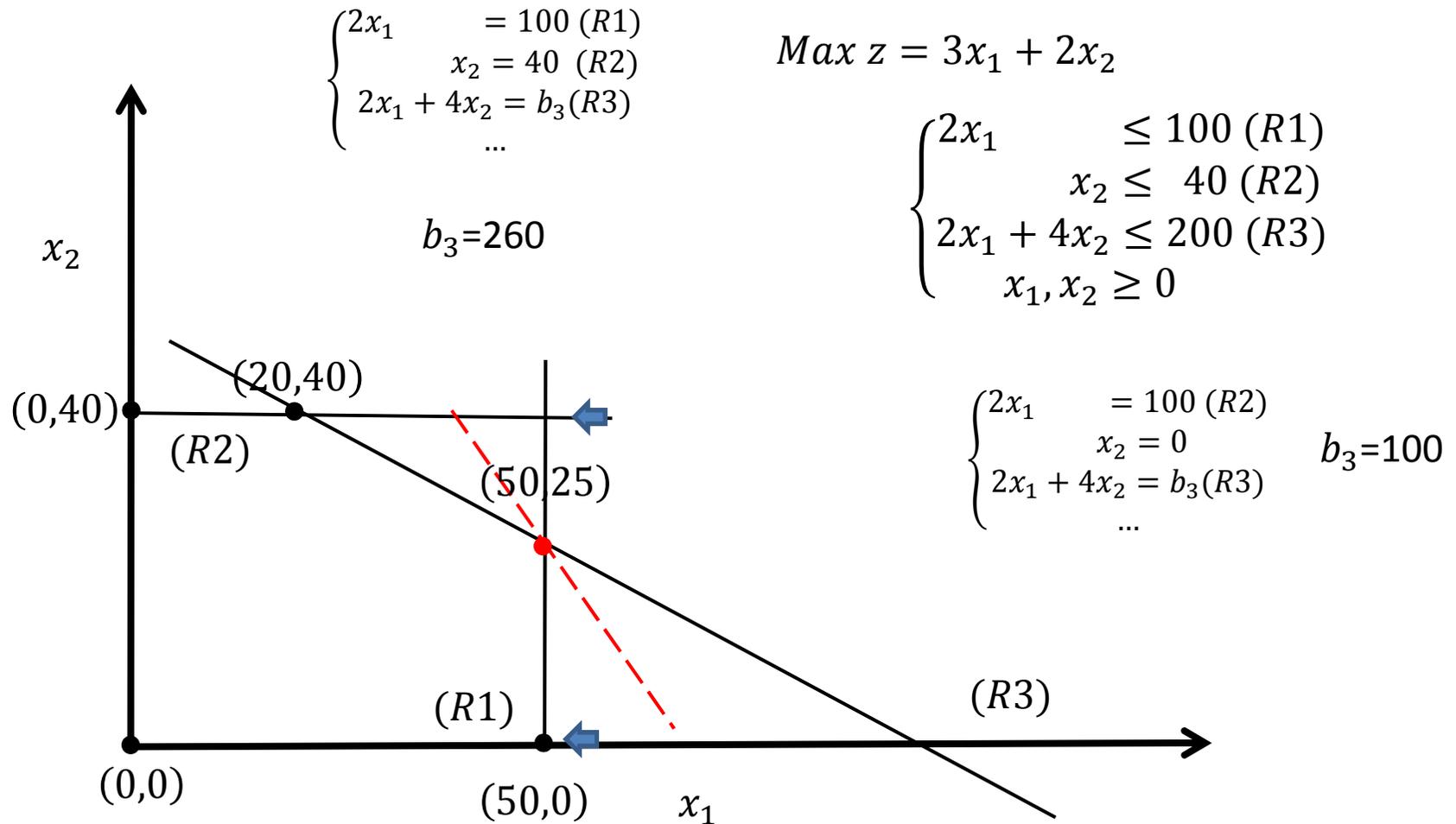
Problema da Giapetto – análise sensibilidade b_3

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \text{ (R1)} \\ x_2 & \leq 40 \text{ (R2)} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \text{ (R3)} \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



Problema da Giapetto – análise sensibilidade b_3



$$100 \leq b_3 \leq 260$$

$$-100 \leq \Delta b_3 \leq 60$$

Dentro deste intervalo o preço sombra mantém-se



Análise de Sensibilidade:

a) coeficientes da função objetivo

Admita-se que c_j foi modificado para $c_j + \Delta c_j$.

Sem voltar a resolver o problema original, para que valores de Δc_j sabemos dizer exatamente quais as consequências no valor ótimo, por se ter feito tal alteração?

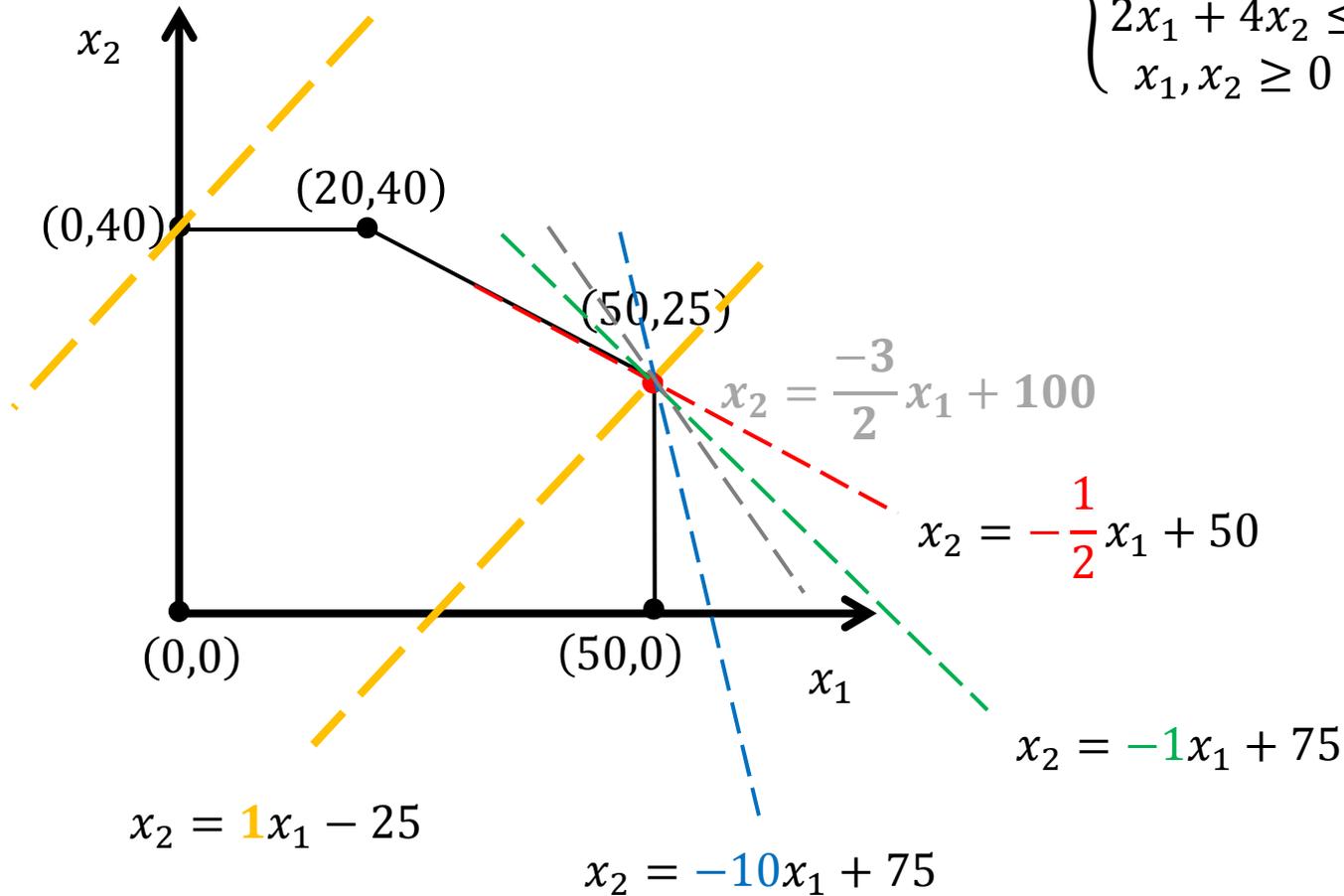
E quais as consequências na solução ótima?

Problema da Giapetto – análise sensibilidade c_i

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{Max } z = -x_1 + x_2$$

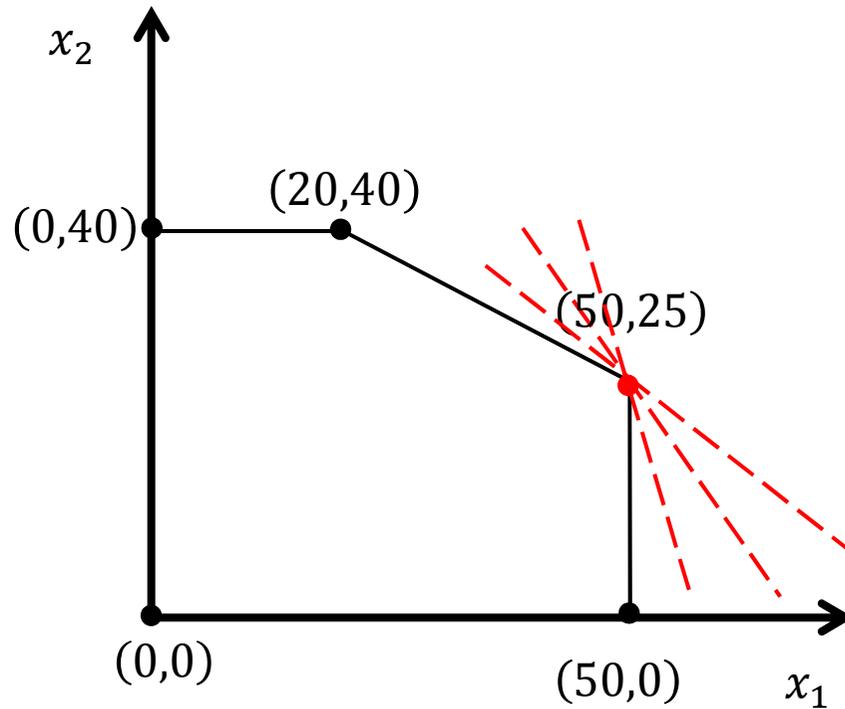
$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \\ & x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



Problema da Giapetto – análise sensibilidade c_i

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

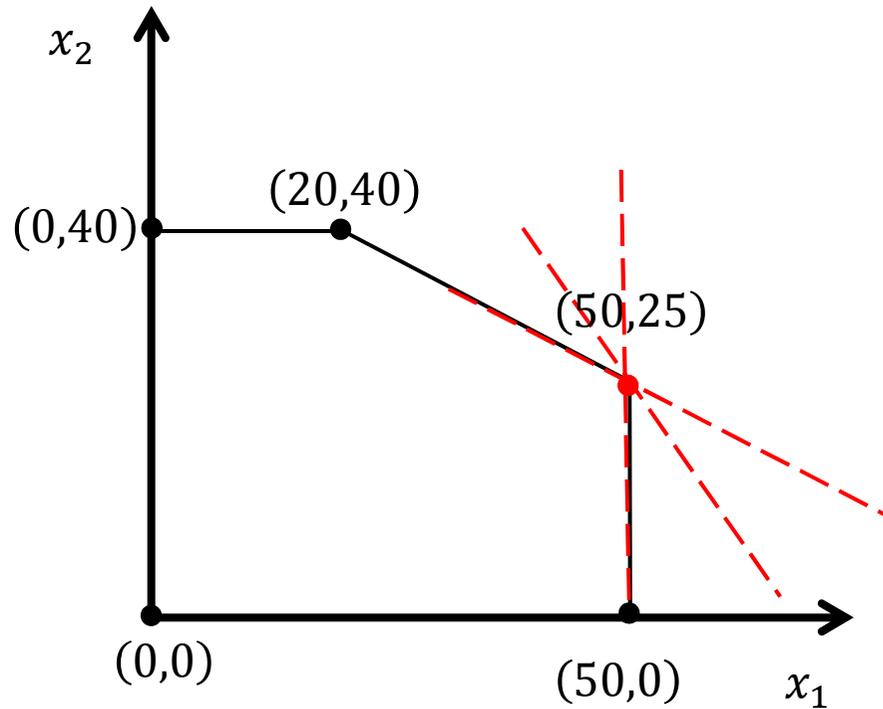
$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \\ & x_2 \leq 40 \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



Problema da Giapetto – análise sensibilidade c_1

$$\text{Max } z = c_1 x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \text{ (R1)} \\ & x_2 \leq 40 \text{ (R2)} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \text{ (R3)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

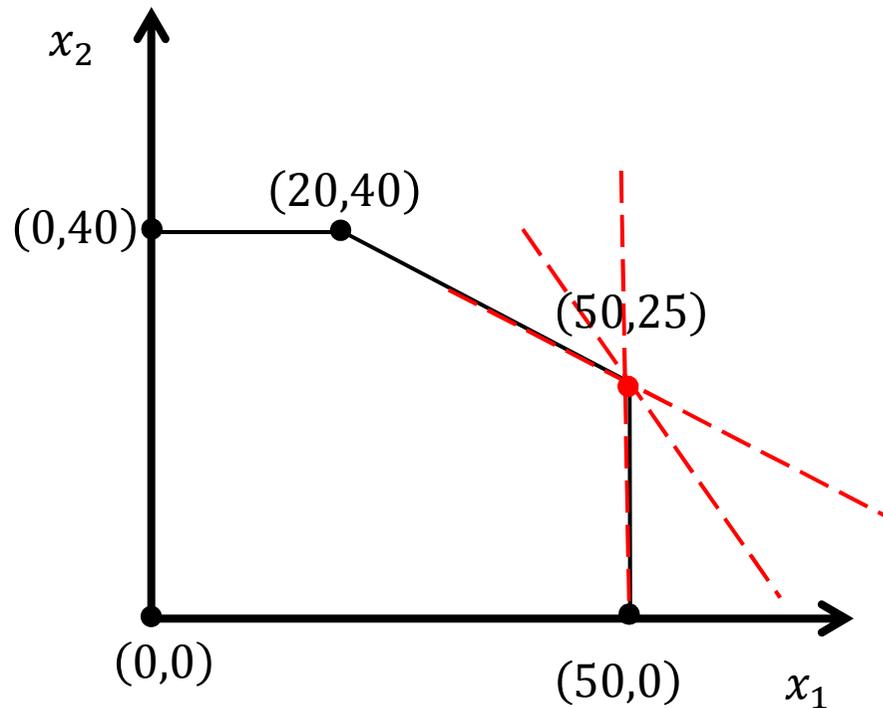


$$-\frac{c_1}{2} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c_1 \geq 1$$

Problema da Giapetto – análise sensibilidade c_2

$$\text{Max } z = 3x_1 + c_2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 & \leq 100 \text{ (R1)} \\ & x_2 \leq 40 \text{ (R2)} \\ 2x_1 + 4x_2 & \leq 200 \text{ (R3)} \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



$$-\frac{3}{c_2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} c_2 &\geq 0 \\ c_2 &\leq 6 \end{aligned}$$



Alterações simultâneas
nos coeficientes na função objetivo:
regra dos 100%

Se os coeficientes variarem dentro dos respetivos intervalos de admissibilidade

e

a soma das percentagens de variação (relativamente à variação máxima no intervalo) for não superior a 100%,

então

a solução ótima não se altera.

(senão, nada se pode concluir)



Alterações simultâneas
nos segundos membros:
regra dos 100%

Se os segundos membros variarem dentro dos respetivos intervalos de admissibilidade
e
a soma das percentagens de variação (relativamente à variação máxima no intervalo) for não superior a 100%,
então
os preços sombra não se alteram e a sua interpretação permanece válida.

(senão, nada se pode concluir)

Restrição adicional



Suponhamos que afinal há que contar com um orçamento limitado a 100\$ para a compra de umas ferragens. Cada soldado e cada comboio precisa de 1\$ de ferragens.

Ou seja há que acrescentar ao problema a seguinte restrição

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

Qual o impacto na solução ótima ?

Se a restrição for satisfeita pela solução ótima não há qualquer alteração,

neste caso $50 + 25 \leq 100$.



Suponhamos que afinal há a possibilidade de produzir também bonecas, cada boneca terá um lucro de 4, e consumirá, 5 horas de acabamentos em verniz, 2 em tinta e 1 de carpintaria. Valerá a pena ponderar a introdução da produção de bonecas?

Ou seja há que acrescentar ao problema uma variável x_3 número de bonecas a produzir semanalmente

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 \leq 100 \\ x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 200 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Restrição dual

$$5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4$$

$$5 * 1 + 2 * 0 + 0,5 > 4$$

Não vale a pena !



Uma joalharia usa rubis e safiras para produzir dois tipos de anéis. O anel tipo 1 inclui 2 rubis, 3 safiras e 1 hora de trabalho, e vende-se por 200\$. O anel tipo 2 inclui 3 rubis, 2 safiras e 2 horas de trabalho, e vende-se por 500\$. Não há limitações de procura mas existem apenas 100 rubis, 120 safiras e 70 de trabalho disponíveis. Contudo, podem ser adquiridos rubis a \$100. A joalharia já se comprometeu a entregar 20 anéis tipo 1 e 25 tipo 2.

- a) Formule o problema e resolva pelo Solver.
- b) Cada rubi custa 190\$ (em vez dos \$100), vale a pena continuar a comprar rubis ? Qual será a nova solução ótima?
- c) Qual será o impacto no valor ótimo se encomendas de anéis tipo 2 baixarem para 23.
- d) Qual deverá ser o valor máximo a pagar por uma hora extra de trabalho ?
- e) Qual deverá ser o valor máximo a pagar por uma safira extra ?
- f) Vale a pena considerar a possibilidade de produzir um novo tipo de anel a vender por \$550, a incluir 4 rubis, 2 safiras e 1 hora de trabalho ?

(Winston, 4th edition, pp 349)



x_1 número de anéis do tipo 1 a produzir							
x_2 número de anéis do tipo 2 a produzir							
x_3 número de rubis a comprar							
		anéis T1	anéis T2	c. rubis			
	rubis	2	3	-1	100	≤	100
	safiras	3	2		110	≤	120
	trabalh o	1	2		70	≤	70
	Enc. T1	1			20	≥	20
	Enc. T2		1		25	≥	25
	lucro	200	500	-100	15000		
		20	25	15			

Relatório de resposta



Objective Cell (Max)						
Cell	Name	Original Value	Final Value			
\$F\$12	lucro	0	15000			
Variable Cells						
Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer		
\$C\$13	anéis T1	0	20	Contin		
\$D\$13	anéis T2	0	25	Contin		
\$E\$13	c. rubis	0	15	Contin		
Constraints						
Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack	
\$F\$10	Encomenda T1	20	\$F\$10>=\$H\$10	Binding	0	
\$F\$11	Encomenda T2	25	\$F\$11>=\$H\$11	Binding	0	
\$F\$7	rubis	100	\$F\$7<=\$H\$7	Binding	0	
\$F\$8	safiras	110	\$F\$8<=\$H\$8	Not Binding	10	
\$F\$9	trabalho	70	\$F\$9<=\$H\$9	Binding	0	



Relatório de sensibilidade

Variable Cells							
			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
Cell	Name		Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
\$C\$13	anéis T1		20	0	200	100	1E+30
\$D\$13	anéis T2		25	0	500	1E+30	200
\$E\$13	c. rubis		15	0	-100	100	66,66666667
Constraints							
			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
Cell	Name		Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
\$F\$10	Encomenda T1		20	-100	20	0	20
\$F\$11	Encomenda T2		25	0	25	0	1E+30
\$F\$7	rubis		100	100	100	15	1E+30
\$F\$8	safiras		110	0	120	1E+30	10
\$F\$9	trabalho		70	100	70	10	0