Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Matemática II

8 de Novembro de 2018

Elementos de solução

1. No caso $\alpha = 0$, verifica-se $Q(0,1,z) = 1 + 2z \ \forall z \in \mathbb{R}$. Logo, Q é indefinida quando $\alpha = 0$.

   No caso $\alpha \neq 0$, Q pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) =& x^2 + 2xy + y^2 + \alpha y^2 + \alpha 2y\frac{z}{\alpha} + \alpha\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha}\right)z^2 = \\ =& (x+y)^2 + \alpha\left(y + \frac{z}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha^3 - 1}{\alpha}z^2. \end{aligned}$$

   Logo, neste caso Q é definida positiva se $\alpha > 0$ e $\alpha^3 - 1 > 0$; é semidefinida positiva mas não definida positiva se $\alpha > 0$ e $\alpha^3 - 1 = 0$; é indefinida nos restantes subcasos.

   Tendo em conta os factos acima expostos:

   Q é definida positiva se $\alpha > 1$;

   Q é semidefinida positiva mas não definida positiva se $\alpha = 1$;

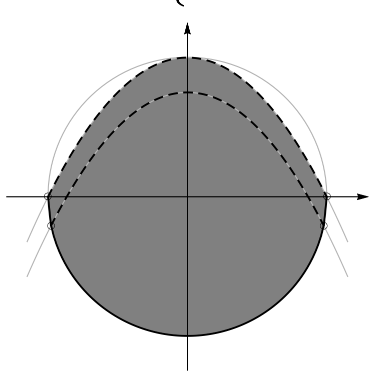
   Q é indefinida se $\alpha < 1$.

2. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 4 - x^2 - 2y > 0 \wedge 4 - x^2 - 2y \neq 1\} =$
   $= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y < \frac{4-x^2}{2} \wedge y \neq \frac{3-x^2}{2}\right\}$.

   As curvas $y = \sqrt{4-x^2}$ e $y = \frac{4-x^2}{2}$ intersectam-se nos pontos $(x,y) = (-2,0)$, $(x,y) = (0,2)$, e $(x,y) = (2,0)$, com

$$\begin{aligned} \frac{4-x^2}{2} &\leq \sqrt{4-x^2} \qquad \text{se } x \in [-2,2], \\ \frac{4-x^2}{2} &> \sqrt{4-x^2} \qquad \text{se } x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\end{aligned}$$

   Logo, $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{4-x^2} \leq y < \frac{4-x^2}{2} \wedge y \neq \frac{3-x^2}{2}\right\}$.



(b) $\text{int}(D_f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{4-x^2} < y < \frac{4-x^2}{2} \wedge y \neq \frac{3-x^2}{2}\right\}$.

A curva $y = \frac{3-x^2}{2}$ intersecta a circunferência $x^2+y^2=4$ nos pontos $(x,y) = \left(-\sqrt{1+2\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}\right)$ e $(x,y) = \left(\sqrt{1+2\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}\right)$. Logo:

$$\begin{aligned}\partial D_f = \ & \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \tfrac{4-x^2}{2} \wedge -2 \leq x \leq 2\right\} \cup \\ & \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \tfrac{3-x^2}{2} \wedge -\sqrt{1+2\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{1+2\sqrt{2}}\right\} \cup \\ & \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\sqrt{4-x^2} \wedge -2 \leq x \leq 2\right\}.\end{aligned}$$

D_f não é fechado, visto que não contém a sua fronteira. Por exemplo, os pontos (x,y) com

$$y = \frac{4-x^2}{2}, \qquad -2 \leq x \leq 2$$

pertencem a $\partial D_f \setminus D_f$.

D_f é limitado porque está contido em qualquer círculo com centro na origem e raio maior que 2.

3. (a) f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque é um quociente de dois polinómios em que o único zero do denominador é o ponto $(0,0)$.

Além disso:

$$\left|\frac{-x(x^2+y^2)}{x^2+2y^2} - 0\right| \leq \frac{|x|(x^2+y^2+y^2)}{x^2+2y^2} = |x|.$$

Logo, f é também contínua no ponto $(0,0)$.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{-t(t^2+0)}{t^2+0} - 0}{t} = -1.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{-0(0+t^2)}{0+2t^2} - 0}{t} = 0.$

(c) Dado que f é um quociente de dois polinómios em que o único zero do denominador é o ponto $(0,0)$, as suas derivadas parciais de primeira ordem são também quocientes de polinómios em que o único zero do denominador é o ponto $(0,0)$. Logo, f, $\frac{\partial f}{\partial dx}$, e $\frac{\partial f}{\partial dy}$ são contínuas no aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, o que garante a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(tu,tv) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{pmatrix} tu \\ tv \end{pmatrix}}{\|(tu,tv)\|} &= \lim_{t\to 0} \frac{t^3uv^2}{|t|^3(u^2+2v^2)\sqrt{u^2+v^2}} = \\ &= \pm \frac{uv^2}{(u^2+2v^2)\sqrt{u^2+v^2}} \neq 0.\end{aligned}$$

Logo, f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

4. (a) Dado que A é uma matriz quadrada de ordem 3, $\lambda = 1$ é valor próprio, e $\lambda = 0$ é valor próprio com multiplicidade algébrica igual a 2, não podem existir outros valores próprios para A e a multiplicidade de $\lambda = 1$ é 1.

Sabendo que A é simétrica, os espaços próprios E_1, E_0 são mútuamente ortogonais. Logo,

$$\begin{aligned} E_0 &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (1,-2,-2)\cdot(x,y,z)=0\right\} = \\ &= \{\alpha(4,1,1)+\beta(0,1,-1) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

(b) O vector $v_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é paralelo a u e $\|v_1\| = 1$. Dados dois vectores $v_2, v_3 \in E_0$ tais que

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j, \\ 0 & \text{se } i\neq j, \end{cases}$$

a matriz A admite a diagonalização

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} = v_1 v_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$