Mestrados

Métodos Quantitativos para DEE

2018/2019

Leonor Santiago Pinto
Gab 506 Quelhas
Telef 213 925 845
Email: lspinto@iseg.ulisboa.pt

Aula 13

Exercícios Problemas transporte e afetação.

Programação Linear Inteira

Exemplo

A *TBA Airlines* é uma pequena companhia aérea, especializada em voos regionais, com aviões de pequenas dimensões. A direção da empresa está a pensar ampliar o negócio, enfrentando as opções de compra de novos aviões pequenos e/ou de aviões maiores para poder dar resposta a novas solicitações de voos.

Pretende-se saber qual a estratégia de compra mais vantajosa, sabendo que neste momento não é possível comprar mais de 2 aviões pequenos e que pode dispor de *US$100 milhões* para investir. Os dados relevantes encontram-se na tabela

	Aviões pequenos	Aviões grandes
Lucro anual por avião	*US$ 1 milhão*	*US$ 5 milhões*
Custo por avião	*US$ 5 milhões*	*US$ 50 milhões*

Formular; resolver graficamente; resolver no Solver;

Obs: em PLI não há sensivity report. NAO ARREDONDAR xlp=(2;1.8) x*=(0;2)

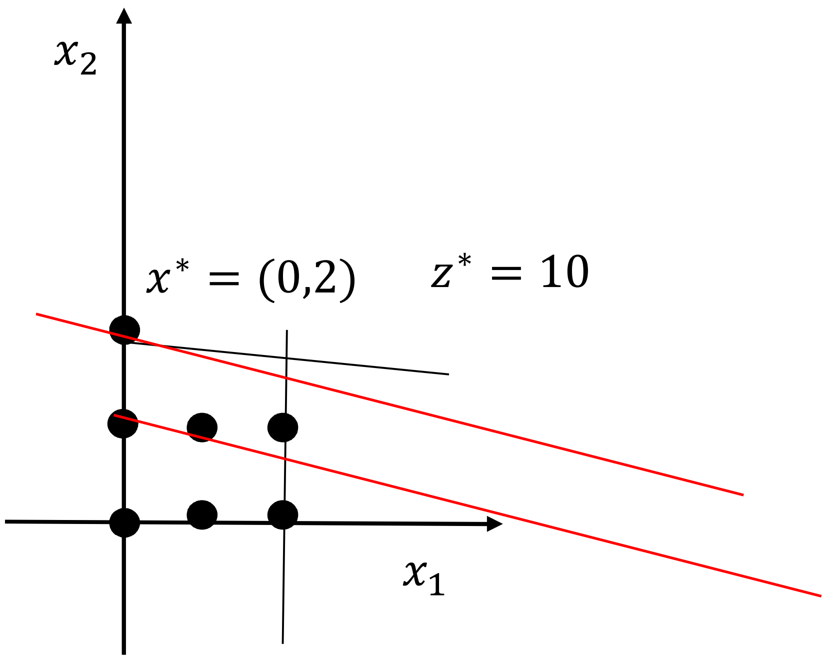
Formulação

x_1 − número de aviões pequenos a comprar
x_2 − número de aviões grandes a comprar

Max Z=$x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 50x_2 \leq 100 \\ x_1 \qquad\qquad \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{cases}$$

Resolução gráfica



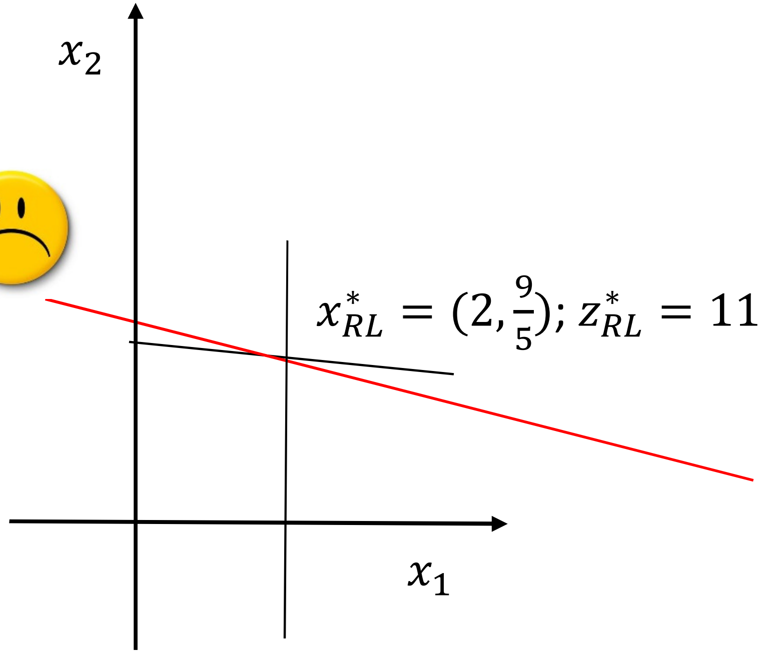
Relaxação Linear

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

Max Z=$x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 50x_2 \leq 100 \\ x_1 \qquad\qquad\quad \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \ \cancel{\text{e inteiros}} \end{cases}$$

Resolução da PL



arredondar $x = (2{,}2)$ *solução não admissível*

truncar $x = (2{,}1)$ *solução admissível*
valor $z = 7$!!!!!!!

Há métodos para resolver exatamente estes problemas mas…

- Variáveis inteiras vs variáveis contínuas

- PLI pura e mista

- **Programação Inteira** (PLI) vs **Programação Binária** (PLB)
  (xj inteiras) (xj=0 ou 1)

- PLB (pura e mista)

  Decisões do tipo S/N
  (afetação de pessoas a tarefas;
  Decisão sobre investir, ou não, em determinado projeto;…)
  Decisões mutuamente exclusivas
  Decisões dependentes
  Disjunção de restrições
  Combinação de custos fixos com custos variáveis

(Ex: carris; recolha do lixo; cortes de peças de 2 dimensões; escalonamento de pessoal)

Decisões mutuamente exclusivas

Exemplo protótipo:
pretendia-se saber

- nº de soldados (**x1**) e
- nº de comboios (**x2**)

a fabricar, por semana, com **restrições** nos recursos (h verniz, t.acr, carp)
e de modo a **maximizar o lucro**
(o lucro de cada soldado é 3 e o de cada comboio é 2)

Formalização

$$
\begin{array}{llr}
 & \max z = 3x1 + 2x2 & \text{(lucro)} \\
 & 2x1 \qquad\quad \le 100 & \text{(verniz)} \\
\text{s.a:} & \qquad\quad x2 \le 40 & \text{(tinta acrilica)} \\
 & 2x1 + 4x2 \le 200 & \text{(carpintaria)} \\
 & x1, x2 \ge 0, &
\end{array}
$$

Variante 1: vão-se produzir só soldados ou só comboios (ou nada, mas não ambas)

Escolher produzir um produto implica não escolher o outro
(e é possível não escolher ambos)

Definam-se

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se se produzir } P_j \\ 0, & \text{se não se produzir } P_j \end{cases}, j = 1,2$$

Então, para M suficientemente grande, fazendo

x1 <= M y1
x2 <= M y2
y1 + y2 <= 1
x1, x2 >=0 e y1, y2 em {0,1}

produzir-se-á P1 ou P2 (ou nenhum) mas nunca ambos.

(y1 + y2 <=1 -----> y1 + y2 = 1 ...)

Disjunção de restrições

(R1) $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$
(R2) $a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$

Pretende-se R1 ou R2 (1 e 1 só das restrições).

Seja

$$y = \begin{cases} 1, \text{se R1 for ativa} \\ 0, \text{se R2 for ativa} \end{cases}$$

Então,

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 + M(1-y)$$
$$a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 + My, \text{com } M \text{ suficientemente grande}$$

Exemplo protótipo: **variante 2**

A empresa protótipo tem possibilidade de utilizar uma outra secção, semelhante à secção de carpintaria atual, isto é, a nova secção pode executar as mesmas tarefas que a anterior, na produção de soldados e comboios.

Na nova secção cada soldado consome 1 h para ser produzido e cada comboio 1 h. A nova secção tem 60 h disponíveis semanalmente.

A direção da fábrica pretende usar apenas uma das secções de carpintaria para produzir os soldados e comboios.

E se tivermos **m restrições**, das quais pretendemos que apenas **k** estejam **ativas**?

(R1) $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$

(R2) $a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$

...

(Rm) $a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$

Sejam

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se a restrição } i \text{ for ativa} \\ 0, & \text{se a restrição } i \text{ não for ativa} \end{cases}$$

Então, se pretendermos que apenas **k** das restrições estejam **ativas**, faz-se

(R1) $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 + M(1 - y_1)$

(R2) $a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 + M(1 - y_2)$

…

(Rm) $a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m + M(1 - y_m)$

e ainda

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_m = k$$

Combinação de custos fixos com custos variáveis

Exemplo protótipo: **variante 3**

Sempre que se produz qualquer dos produtos tem-se um custo fixo (afinação do equipamento para começar a produção): 7 u.m. para os soldados e 13 u.m. para os comboios.

Exemplo (§11.1) California Manufacturing Co

(...) A administração da *California Manufacturing Co* pretende saber se deve construir uma nova fábrica em Los Angeles ou em S. Francisco, ou mesmo nas duas cidades. Está também a considerar construir um armazém (no máximo), obrigatoriamente numa das cidades onde a fábrica for construída.

O montante máximo a investir é 10 milhões de dólares e os dados principais são os seguintes

Questões S/N	**valor atual líquido**	**capital necessário**
Construir uma fábrica em Los Angeles?	US$ 9 milhões	US$ 6 milhões
Construir uma fábrica em S. Francisco?	US$ 5 milhões	US$ 3 milhões
Construir um armazém em Los Angeles?	US$ 6 milhões	US$ 5 milhões
Construir um armazém em S. Francisco?	US$ 4 milhões	US$ 2 milhões

Pretende-se determinar a combinação de investimentos que maximiza o valor atual líquido total.

Exemplo (§11.4) Good Products Company

O departamento de Investigação da GPC desenvolveu 3 possíveis novos produtos. Para evitar demasiada diversificação na linha de produtos da GPC, o diretor impôs a seguinte restrição: dos 3 possíveis novos produtos, no máximo 2 deverão ser produzidos
Por razões administrativas o diretor impôs também que toda a produção dos novos produtos seja feita na mesma fábrica.

Os custos de produção unitários são essencialmente os mesmos nas duas fábricas. No entanto, devido à diferença de equipamentos, o tempo de produção unitário pode diferir de uma fábrica para a outra. Na tabela seguinte encontram-se estes valores e a estimação de vendas semanais feitas pela equipa de marketing.

O diretor pretende saber que produtos produzir, onde e em que quantidade, de modo a maximizar o lucro total.

	nº de horas necessárias por unidade a produzir			nº de horas disponíveis por semana
	P1	P2	P3	
Fábrica F1	3	4	2	30
Fábrica F2	4	6	2	40
Lucro unitário	5	7	3	(em milhares de dolares)
Potenciais vendas	7	5	9	(unidades por semana)