Mestrados

Métodos Quantitativos para DEE

2018/2019

Leonor Santiago Pinto
Gab 506 Quelhas
Telef 213 925 845
Email: lspinto@iseg.ulisboa.pt

Aulas 16 a 18

Teoria dos Jogos

Exercícios

Teoria dos jogos

Começou a desenvolver-se nos anos 30 do sec. XX

1944, *'The Theory of games and Economic Behavior'*,
John von Newman, Oscar Morgenstern

1994, John Harsanyi, **John Nash** (1928) (A beautiful mind),
Reinhard Selten (1930),

Nobel da Economia
Premio do Banco Central da Suécia de Ciências Económicas
em Memória de Alfred Nobel

2005, Robert Auman (1930), Thomas Schelling (1921)

2007, Leonid Hurwicz, Eric Maskin (1950), Robert Myerson (1951)

2012, Alvin Roth (1951) e Lloyd Shapley (1923)

2016, Oliver Hart (1948) e Bengt Holmström (1949)

Excerto do filme “Beautifull mind” legendado em Português:

https://www.youtube.com/watch?v=4qmIJvytsBU

Teoria dos jogos

Os participantes, para atingirem os seus objetivos,

não pensam só nos seus próprios objetivos mas também nos dos opositores,

tomando as suas decisões tendo em conta as possíveis decisões estratégicas dos opositores

Guerra

Processos negociais entre sindicatos e empregadores

Interações entre empresas que disputam o mesmo mercado

Dilema do prisioneiro

Dois suspeitos, A e B, são presos pela polícia. A polícia tem provas insuficientes para os condenar, mas, separando os prisioneiros, oferece a ambos o mesmo acordo: se um dos prisioneiros, confessando, testemunhar contra o outro e esse outro permanecer em silêncio, o que confessou sai livre enquanto o cúmplice silencioso cumpre 10 anos de sentença. Se ambos ficarem em silêncio, a polícia só pode condená-los a 6 meses de cadeia cada um. Se ambos traírem o comparsa, cada um leva 5 anos de cadeia. Cada prisioneiro toma a sua decisão sem saber que decisão o outro vai tomar, e nenhum tem certeza da decisão do outro. A questão que o dilema propõe é: o que vai acontecer? Como o prisioneiro vai reagir?

	Prisioneiro "B" nega	Prisioneiro "B" confessa
Prisioneiro "A" nega	Ambos são condenados a 6 meses	"A" é condenado a 10 anos; "B" sai livre
Prisioneiro "A" confessa	"A" sai livre; "B" é condenado a 10 anos	Ambos são condenados a 5 anos

Dilema do prisioneiro

	Prisioneiro "B" nega	Prisioneiro "B" confessa
Prisioneiro "A" nega	Ambos são condenados a 6 meses	"A" é condenado a 10 anos; "B" sai livre
Prisioneiro "A" confessa	"A" sai livre; "B" é condenado a 10 anos	Ambos são condenados a 5 anos

Confessar é uma estratégia dominante para ambos os jogadores. Seja qual for a eleição do outro jogador, podem reduzir sempre sua sentença confessando. Por desgraça para os prisioneiros, isto conduz a um resultado regular, no qual ambos confessam e ambos recebem longas condenações. Aqui se encontra o ponto chave do dilema. O resultado das interacções individuais produz um resultado que não é óptimo no sentido de Pareto; existe uma situação tal que a utilidade de um dos detidos poderia melhorar (ou mesmo a de ambos) sem que isto implique uma piora para o resto. Por outras palavras, o resultado no qual ambos os detidos não confessam domina o resultado no qual os dois escolhem confessar.

O dilema do prisioneiro é um exemplo clássico de um jogo mas não é um jogo de soma nula (ou constante) como os que vamos estudar.

Jogos de 2 pessoas soma nula

Hipóteses

- Existem 2 jogadores, J1 e J2, e têm interesses totalmente opostos. **Não** há **cooperação** possível

- Uma só jogada e a escolha é simultânea

- Cada jogador é **racional**, isto é, avesso ao risco e portanto escolhe a melhor das piores situações (por exemplo, J1...)

- Cada jogador escolhe uma estratégia que lhe permita obter o melhor ganho possível, caso o seu oponente soubesse que estratégia ele ia escolher

(**Hipótese Fundamental dos jogos de 2 pessoas e soma nula**, John von Newman & Óscar Morgenstern)

Exemplo

Dois políticos concorrem para o Senado Americano. Pretendem planear a campanha para os dois últimos dias que se julgam cruciais para o resultado. Por isso, ambos os políticos pretendem passar os dois dias em duas cidades, Bigtown e Megalopolis. Para não consumirem tempo de campanha as deslocações serão feitas de noite, e assim passam um dia em cada cidade ou ambos numa das cidades. Contudo, como há que planear a campanha com antecedência, nenhum dos políticos sabe o que o adversário decidiu antes de ter o seu plano feito. Portanto, cada político pede ao seu diretor de campanha para o informar do impacto (em termos de votos ganhos ou perdidos) de cada uma das decisões que pode tomar tendo em conta as possíveis decisões do adversário. Em função disso escolherá a melhor estratégia.

Estratégias:

E1 passar um dia em cada cidade;

E2 passar ambos os dias em Bigtown ;

E3 passar ambos os dias em Megalopolis;

Exemplo V1

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

J1

	E1	E2	E3
E1	1	2	4
E2	1	0	5
E3	0	1	-1

O Político 1 ganha 5000 votos ao político 2 se decidir passar ambos os dias em Bigtown (E2) e o político 2 decidir passá-los em Megalopolis (E3)

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Caso geral:

dados

- m estratégias do J1 (E1,...,Em)
- n estratégias do J2 (E1,...,En)
- matriz dos ganhos ($p_{ij}, i = 1, \dots, m;\ \ j = 1, \dots, n$)

$\boldsymbol{p_{ij}}$ = quantia que o J1 recebe do J2,
quando J1 escolhe a estratégia *i* e
o jogador J2 escolhe a estratégia *j*

Exemplo V1 Estratégia Dominada

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

J1		E1	E2	E3
	E1	1	2	4
	E2	1	0	5
	~~E3~~	~~0~~	~~1~~	~~-1~~

O político 1 nunca deve usar a estratégia E3 porque ganha sempre menos com esta do que com a estratégia E1, ie, nunca deve decidir passar ambos os dias em Megalopolis. Neste caso diz-se que a estratégia E3 é dominada.

Estratégia Dominada

Def: Uma **estratégia** é **dominada** por outra, se a 2ª for pelo menos tão boa como a primeira.

Obs: uma estratégia dominada pode ser eliminada.

No caso do jogador J1
Se $\boldsymbol{p_{kj}} \leq \boldsymbol{p_{hj}}$ para $j = 1,2, \ldots, n$ => Ek é dominada por Eh
A Ek do jogador J1 pode ser eliminada.

No caso do jogador J2
Se $\boldsymbol{p_{ik}} \geq \boldsymbol{p_{ih}}$ para $i = 1,2, \ldots, m$ => Ek é dominada por Eh
A Ek do jogador J2 pode ser eliminada.

Exemplo V1 E Dominadas Solução

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

J1		E1	E2	E3
	E1	1	2	4
	E2	1	0	5

O político 2 nunca deve usar a estratégia E3 porque perde sempre mais com esta do que com a estratégia E1, ou a E2 ie, nunca deve decidir passar ambos os dias em Megalopolis.

Neste caso diz-se que a estratégia E3 é dominada.

Exemplo V1 E Dominadas

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

		J2	
		E1	E2
J1	E1	1	2
	~~E2~~	~~1~~	~~0~~

O político 1 nunca deve usar a estratégia E2, a estratégia E2 é dominada.

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

J1

	E1	E2
E1	1	2

O político 2 nunca deve usar a estratégia E2, a estratégia E2 é dominada.

Exemplo V1 E Dominadas Solução

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

	E1
E1	1

J1

Solução do jogo: ambos devem selecionar a estratégia E1, isto é, ambos devem passar um dia em cada uma das cidades.

Exemplo V2

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

J1		E1	E2	E3
	E1	-3	-2	6
	E2	2	0	2
	E3	5	-2	-4

O Político 1 ganha 2000 votos a político 2 se decidir passar ambos os dias em Bigtown (E2) o político 2 decidir passá-los em Megalopolis (E3)

Aqui não há estratégias dominadas como encontrar a solução do jogo ?

Exemplo V2

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

J1

	E1	E2	E3	Min
E1	-3	-2	6	
E2	2	0	2	
E3	5	-2	-4	
Max				

Exemplo V2

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

J1	E1	E2	E3	Min
E1	-3	-2	6	-3
E2	2	0	2	0
E3	5	-2	-4	-4
Max	5	0	6	

Max

Min

Critério minimax

Ponto de sela - ponto estável – ponto de equilibrio

Ponto de Sela.

Def: Se $$\max_i \min_j p_{ij} = \min_j \max_i p_{ij} = \nu,$$

então diz-se que a matriz satisfaz a condição de **ponto de sela**.
À constante ν chama-se **valor do jogo**.

Obs: se existe ponto de sela, então cada jogador não mudaria a sua estratégia se conhecesse antecipadamente a do outro

→ **solução de equilíbrio** ou **solução estável**

(nenhum jogador pode melhorar o seu ganho
se mudar unilateralmente a sua estratégia).

Jogos de 2 pessoas e soma constante
Soma nula é caso particular

Exemplo - soma constante

Partilha de audiências
100 milhares de espetadores

	sic			
RTP	Filme	Telenovela	Comédia	
Filme	35	15	60	
Telenovela	45	58	50	
Comédia	38	14	70	

RTP Filme sic Filme 35000 vêm RTP e 65000 vêm sic

Exemplo - soma constante

Partilha de audiências
100 milhares de espetadores

	sic			
RTP	Filme	Telenovela	Comédia	Min
Filme	35	15	60	15
Telenovela	45	58	50	**45**
Comédia	38	14	70	14
Max	**45**	58	70	

Equilibrio RTP Telenovela sic Filme => 45000 vêm RTP e 55000 vêm sic
Ponto de sela

Exercícios

2	2
1	3

4	5	5	8
6	7	6	9
5	7	5	4
6	6	5	5

Exemplo V3

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

J1

	E1	E2	E3	Min
E1	0	-2	2	-2
E2	5	4	-3	-3
~~**E3**~~	~~2~~	~~3~~	~~-4~~	~~-4~~
Max	5	4	2	

Max

Min

Critério minimax

Não há Ponto de sela

Estratégias mistas

Total ganhos pelo jogador 1:

		Jogador 2		
Jogador 1		E1	E2	E3
	E1	0	-2	2
	E2	5	4	-3

Obs: sem ponto de sela;
qualquer solução é instável.

Uma vez que **nenhum jogador pode saber da decisão do outro**, entre as estratégias aceitáveis dever-se-á usar alguma aleatoriedade.

Def: **Estratégia mista**: Cada jogador escolhe cada uma das estratégias possíveis com uma determinada probabilidade.

Seja

x_i= probabilidade do jogador 1 escolher a estratégia *i, i=1,...,m*

y_j = probabilidade do jogador 2 escolher a estratégia *j, j=1,..,n.*

Exemplo:

x = (1/2,1/2) e y = (0,2/3,1/3)

Ganho esperado para o jogador 1:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_i y_j$$

Estratégias mistasconstante

Para jogos sem ponto de sela as estratégias mistas estendem o conceito de minimax.

A estratégia mista que é ótima para o jogador 1 de acordo com este critério é aquela que garante que o mínimo payoff esperado é máximo e designa-se por $\underline{v}$. Por outro lado, a estratégia mista que é ótima para o jogador 2 de acordo com este critério é aquela que garante que o máximo payoff esperado é mínimo e designa-se por $\overline{v}$ (minimização da perda).

Teorema minimax

Se forem admitidas estratégias mistas, o par de estratégias mistas que é ótimo de acordo com o critério minimax conduz a uma solução estável com $\underline{v} = \overline{v} = v$ (o valor do jogo), nenhum dos jogadores conseguirá melhor mudando unilateralmente a sua estratégia.

Estratégias mistas constante

(y_1, y_2, y_3)	Ganho esperado
(1,0,0)	$0x_1 + 5(1 - x_1) = \mathbf{5 - 5x_1}$
(0,1,0)	$-2x_1 + 4(1 - x_1) = \mathbf{4 - 6x_1}$
(0,0,1)	$2x_1 - 3(1 - x_1) = \mathbf{-3 + 5x_1}$

Total ganhos pelo jogador 1:

			Jogador 2		
Jogador 1			y_1	y_2	y_3
			E1	E2	E3
	x_1	E1	0	-2	2
	x_2	E2	5	4	-3

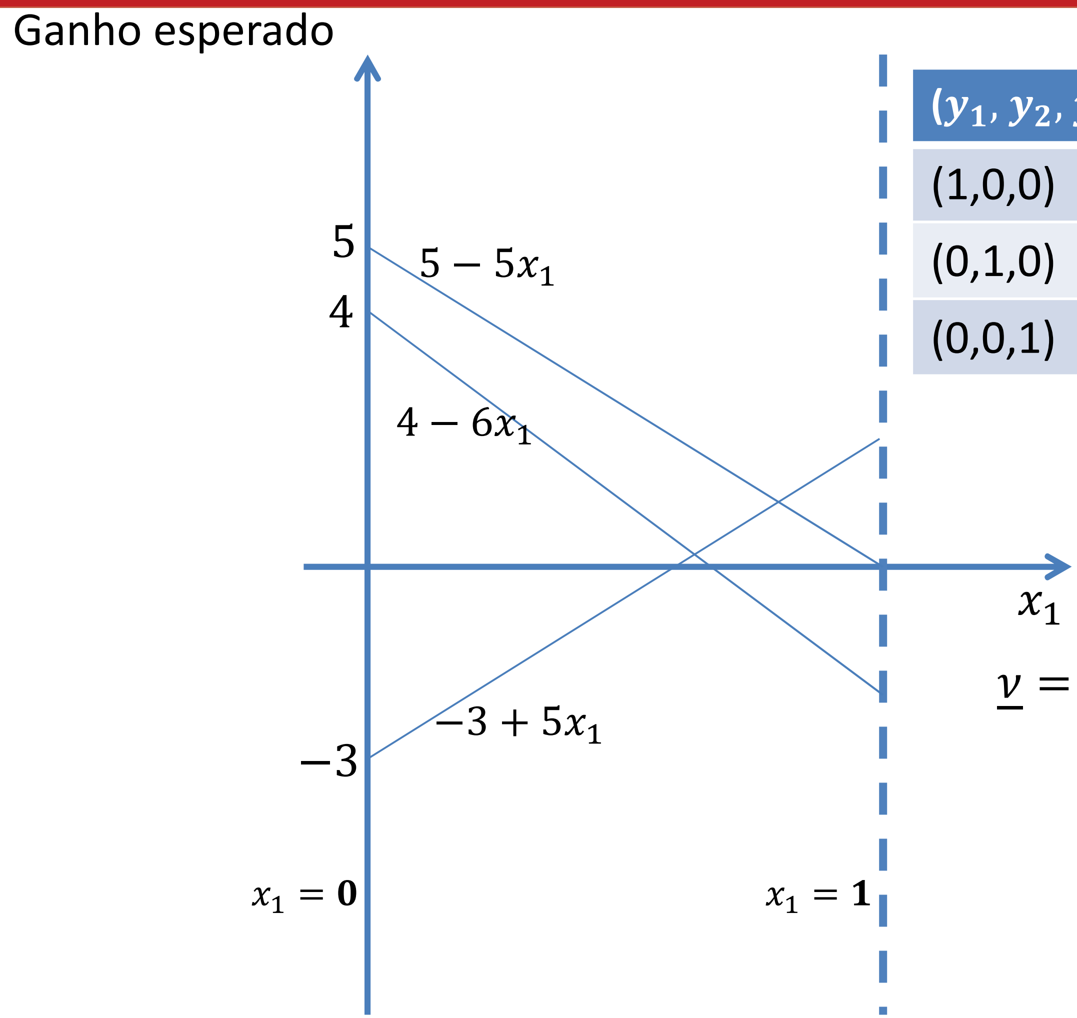
$$x_2 = 1 - x_1$$

Ganho esperado para o jogador 1:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_i y_j$$

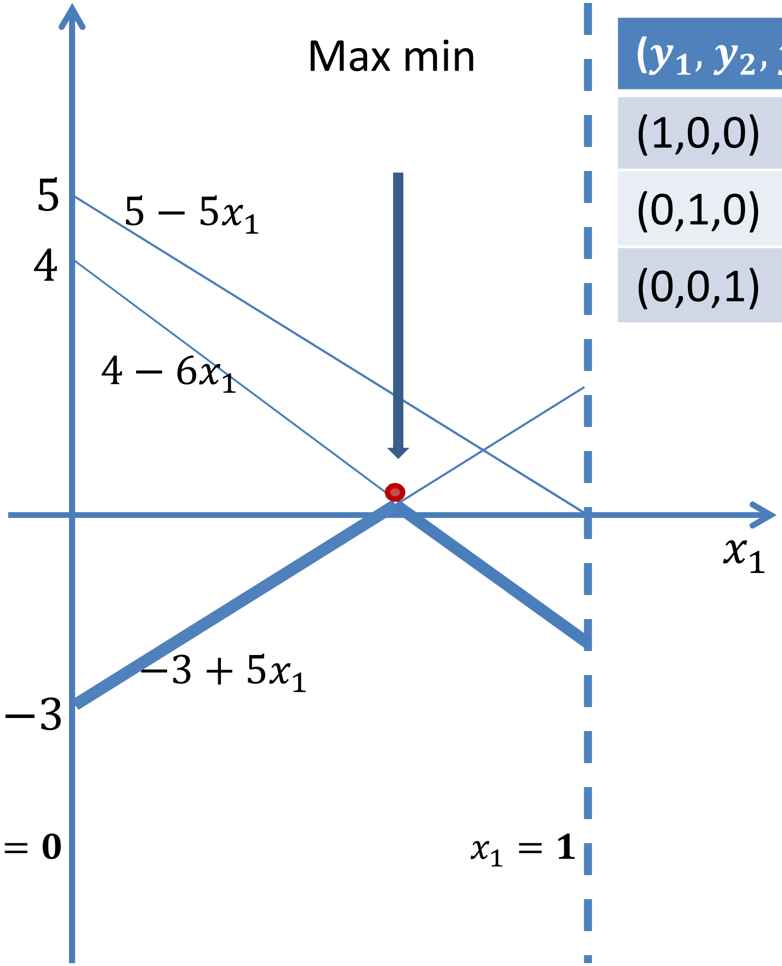
Ganho esperado jogador1 $\boldsymbol{y_1}(5 - 5x_1) + \boldsymbol{y_2}(4 - 6x_1) + \boldsymbol{y_3}(-3 + 5x_1)$

Resolução gráfica



(y_1, y_2, y_3)	Ganho esperado
(1,0,0)	$0x_1 + 5(1 - x_1) = \mathbf{5 - 5x_1}$
(0,1,0)	$-2x_1 + 4(1 - x_1) = \mathbf{4 - 6x_1}$
(0,0,1)	$2x_1 - 3(1 - x_1) = \mathbf{-3 + 5x_1}$

$$\underline{v} = v = \max_{0 \le x_1 \le 1} \{min\{-3 + 5x_1, 4 - 6x_1\}\}$$



(y_1, y_2, y_3)	Ganho esperado
(1,0,0)	$0x_1 + 5(1-x_1) = \mathbf{5 - 5x_1}$
(0,1,0)	$-2x_1 + 4(1-x_1) = \mathbf{4 - 6x_1}$
(0,0,1)	$2x_1 - 3(1-x_1) = \mathbf{-3 + 5x_1}$

Estratégia ótima para o jogador 1

$$-3+5x_1 = 4-6x_1$$

$$x_1 = \frac{7}{11};\ x_2 = \frac{4}{11}$$

Ganho esperado jogador1 $\quad v = -3+5x_1 = -3+5\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{2}{11}$

Estratégia ótima para o jogador 2

$$y^*{}_1(5-5x_1)+y^*{}_2(4-6x_1)+y^*{}_3(-3+5x_1)\leq \bar{v}=v=\frac{2}{11}$$

$$\frac{20}{11}y^*{}_1+\frac{2}{11}y^*{}_2+\frac{2}{11}y^*{}_3=v=\frac{2}{11}$$

$$y^*{}_1+y^*{}_2+y^*{}_3=1$$

$y^*{}_1=0$ caso contrário não se verifica

$$y^*{}_2(4-6x_1)+y^*{}_3(-3+5x_1)\begin{cases}\leq \frac{2}{11} & 0\leq x_1\leq 1\\ =\frac{2}{11} & x_1=\frac{7}{11}\end{cases}$$

Estratégia ótima para o jogador 1

$$x_1=\frac{7}{11};\ x_2=\frac{4}{11}$$

$$v=-3+5x_1=-3+5\left(\frac{7}{11}\right)=\frac{2}{11}$$

Estratégia ótima para o jogador 2

Conclusão resolver

$$y^*{}_2(4-6x_1)+y^*{}_3(-3+5x_1)=\frac{2}{11} \quad \text{com} \quad 0 \le x_1 \le 1$$

$$x_1 = 1 \quad \longrightarrow \quad 4y^*{}_2 - 3y^*{}_3 = \frac{2}{11} \qquad y^*{}_1 = 0;\, y^*{}_2 = \frac{5}{11};\, y^*{}_3 = \frac{6}{11}$$

$$x_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad -2y^*{}_2 + 2y^*{}_3 = \frac{2}{11}$$

Estratégia ótima para o jogador 2

$$y_1 = 0;\, y_2 = \frac{5}{11};\, y_3 = \frac{6}{11}$$

Estratégia ótima para o jogador 1

$$x_1 = \frac{7}{11};\, x_2 = \frac{4}{11}$$

$$v = -3 + 5x_1 = -3 + 5\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{2}{11}$$

Exemplo V3

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

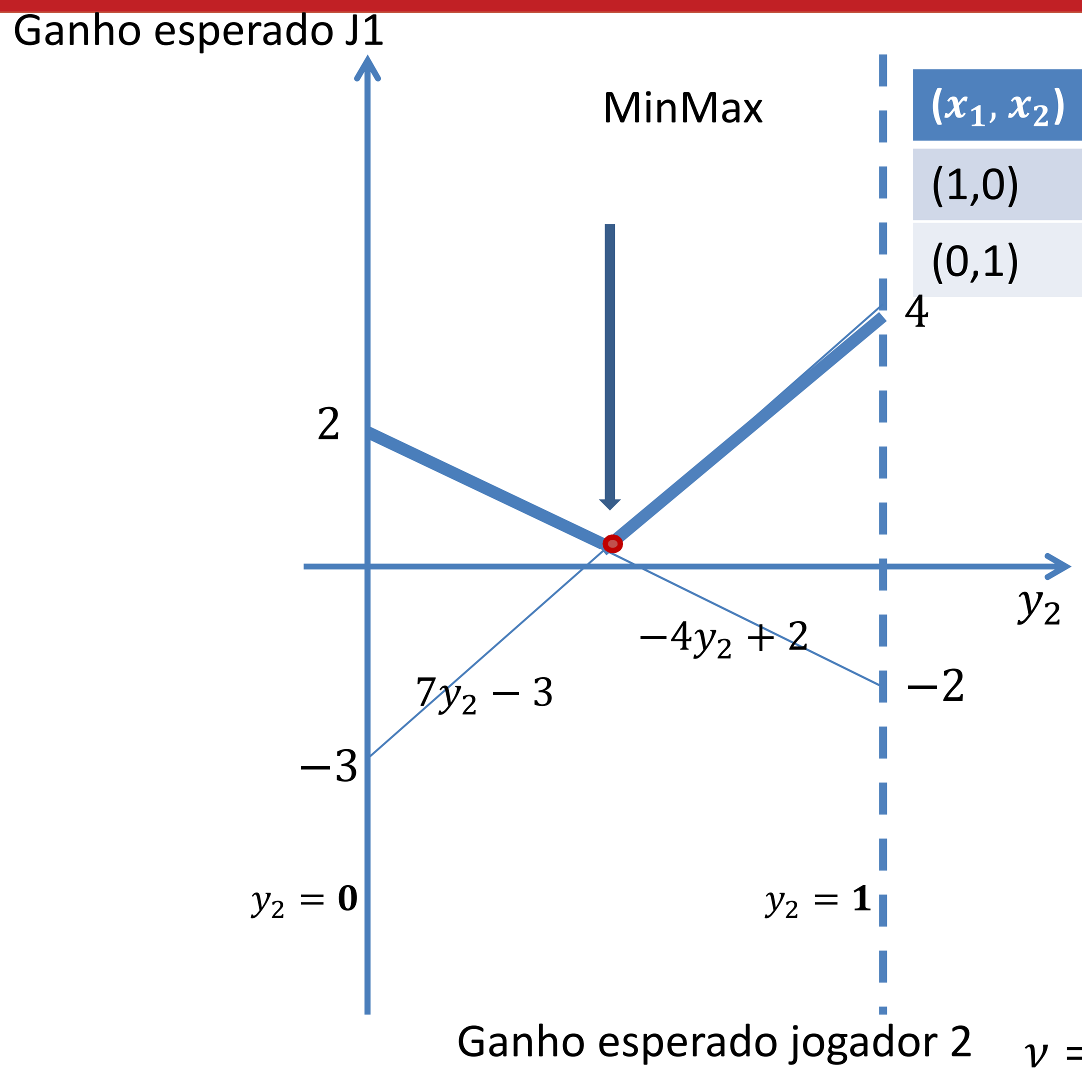
J1

	E1	E2	E3	Min
E1	0	-2	2	-2
E2	5	4	-3	-3
E3	2	3	-4	-4
Max	5	4	2	

Max

Min

Resolução gráfica



(x_1, x_2)	Ganho (perda) esperado
(1,0)	$-2y_2 + 2(1 - y_2) = \mathbf{-4y_2 + 2}$
(0,1)	$4y_2 - 3(1 - y_2) = \mathbf{7y_2 - 3}$

Estratégia ótima para o jogador 2

$$-4y_2 + 2 = 7y_2 - 3$$

$$y_2 = \frac{5}{11}; y_3 = \frac{6}{11}$$

$$v = -4y_2 + 2 = -4\left(\frac{5}{11}\right) + 2 = \frac{2}{11}$$

matriz dos ganhos/payoff matrix/tabela de prémios

Milhares de votos (líquidos) ganhos pelo político1

J2

		E1	E2	E3	Min
	E1	0	-2	2	-2
J1	**E2**	5	4	-3	-3
	E3	2	3	-4	-4
	Max	5	4	2	

Max

Min

Estratégias mistasconstante

<u>Objetivo do J1</u>: escolher a estratégia mista que maximize o ganho esperado mínimo, isto é, determinar x_1, x_2, x_3 de modo a

$$\max_{x_1,\, x_2,\, x_3} \left(\text{min (ganhos esperados)} \right)$$

Ora,

Se J2 escolher E1, o ganho esperado do J1 é $0x_1 + 5x_2 + 2x_3$
Se J2 escolher E2, o ganho esperado do J1 é $-2x_1 + 4x_2 + 3x_3$
Se J2 escolher E3, o ganho esperado do J1 é $2x_1 - 3x_2 - 4x_3$

Assim, J1 pretende

$$\max_{x_1,\, x_2,\, x_3} \left(\min\{0x_1 + 5x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3\} \right)$$

Estratégias mistas - PL

Vimos que, para encontrar a sua estratégia ótima, o J1 precisa de determinar

$$\max_{x_1,\, x_2,\, x_3} \left(\ \min\{0x_1 + 5x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3\} \right)$$

Seja $\nu = \min\{0x_1 + 5x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 3x_3, 2x_1 - 3x_2 - 4x_3\}$). Então

$$\nu \ \leq 0x_1 + 5x_2 + 2x_3$$
$$\nu \ \leq -2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$\nu \ \leq 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

Assim, para determinar a estratégia otima para J1, basta resolver o PL:

$$\max \ \nu$$
$$\nu \ \leq 0x_1 + 5x_2 + 2x_3$$
$$\nu \ \leq -2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$\nu \ \leq 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Estratégias mistas - PLconstante

Analogamente,

<u>Objetivo do J2</u>: escolher a estratégia mista que minimize a perda esperada máxima, isto é, determinar y_1, y_2, y_3, de modo a

$$\min_{y_1,\, y_2, y_3} \max \text{(perdas esperadas)}$$

Ora,

Se J1 escolher E1, a perda esperada do J2 é $0y_1 - 2y_2 + 2\, y_3$
Se J1 escolher E2, a perda esperada do J2 é $5y_1 + 4y_2 - 3\, y_3$
Se J1 escolher E3, a perda esperada do J2 é $2y_1 + 3y_2 - 4\, y_3$
Assim, J2 pretende

$$\min_{y_1,\, y_2, y_3} \left(\max\{0y_1 - 2y_2 + 2\, y_3, 5y_1 + 4y_2 - 3\, y_3, 2y_1 + 3y_2 - 4\, y_3\} \right)$$

Estratégias mistas - PLconstante

Sendo $t = \max\{0y_1 - 2y_2 + 2\,y_3, 5y_1 + 4y_2 - 3\,y_3, 2y_1 + 3y_2 - 4\,y_3\}$

$$
\begin{aligned}
t &\geq 0y_1 - 2y_2 + 2\,y_3 \\
t &\geq 5y_1 + 4y_2 - 3\,y_3 \\
t &\geq 2y_1 + 3y_2 - 4\,y_3
\end{aligned}
$$

Assim, para determinar a estratégia ótima para J2, basta resolver o PL:

min t

$$
\begin{aligned}
t &\geq 0y_1 - 2y_2 + 2\,y_3 \\
t &\geq 5y_1 + 4y_2 - 3\,y_3 \\
t &\geq 2y_1 + 3y_2 - 4\,y_3 \\
& y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Estratégias mistas - PLconstante

No caso geral, dada a matriz de ganhos

		Jogador 2				
		E1	…	Ej	…	En
J1	E1	p_{11}	…	p_{1j}	…	p_{1n}
	Ei	p_{i1}	…	p_{ij}	…	p_{in}
	Em	p_{m1}	…	p_{mj}	…	p_{mn}

sendo x_i = probabilidade de J1 escolher a estratégia i, $i=1,\dots,m$
y_j = probabilidade de J2 escolher a estratégia j, $j=1,\dots,n$,

a estratégia ótima de J1 pode ser determinada resolvendo o PL

Estratégias mistas - PLconstante

PL do jogador J1

$$\max \nu$$

$$s.a \begin{cases} \nu \leq p_{11}x_1 + \cdots + p_{i1}x_i + \cdots + p_{m1}x_m \\ \nu \leq p_{1j}x_1 + \cdots + p_{ij}x_i + \cdots + p_{mj}x_m \\ \nu \leq p_{1n}x_1 + \cdots + p_{in}x_i + \cdots + p_{mn}x_m \\ x_1 + \cdots + x_i + \cdots + x_m = 1 \\ x_1, \dots, x_i, \dots, x_m \geq 0 \end{cases}$$

…

PL do jogador J2

$$\min t$$

$$s.a \begin{cases} t \geq p_{11}y_1 + \cdots + +p_{1j}y_j \dots + p_{1n}y_n \\ t \geq p_{i1}y_1 + \cdots + p_{ij}y_j + \cdots + p_{in}y_n \\ t \geq p_{m1}y_1 + \cdots + p_{mj}y_j + \cdots + p_{mn}y_n \\ y_1 + \cdots + y_j + \cdots + y_n = 1 \\ y_1, \dots, y_j, \dots, y_n \geq 0 \end{cases}$$

…

Conclusão:

1. Como o PL do J2 não é mais do que o dual do PL do J1,
as estratégias ótimas de ambos os jogadores,
bem como o valor do jogo,
podem ser obtidas resolvendo apenas um dos problemas.

2. **Um jogo de 2 pessoas e soma nula tem sempre pelo menos uma solução de equilíbrio**.

Jogos de 2 pessoas e soma nula

→ soma constante

Jogos de 2 pessoas e soma não constante

- cooperativos
- não cooperativos

Jogos para n (>2) jogadores

- cooperativos
- não cooperativos

Jogos infinitos

Jogos iterativos