Mestrado em Matemática Financeira

Processos de Lévy e aplicações

Exame - Época de Recurso

Duração: 2 horas
Justifique cuidadosamente as suas respostas

25 de Janeiro de 2012

1. Descreva os processos Variância-Gama, inverso gaussiano normal e CGMY detalhadamente. (2 valores)

2. (a) Enuncie a fórmula de Lévy-Khintchine e descreva o triplo de características associado às distribuições infinitamente divisíveis mais comuns. (1,5 valores)

(b) Defina o que se entende por medida de Lévy e mostre que a condição que tem que ser verificada por uma medida de Lévy ν é equivalente à condição

$$\int_{\mathbb{R}^d-\{0\}} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\nu(dy) < \infty. \qquad \text{(1,5 valores)}$$

(c) Apresente e represente graficamente as medidas de Lévy associadas a um processo de Poisson e a um Processo α-estável com $\alpha \neq 2$, respectivamente, e prove que satisfazem a condição de medida de Lévy. (1,5 valores).

3. (a) Defina o que se entende por subordinador Gaussiano inverso, explicitando a densidade deste processo. Explique em que sentido este subordinador generaliza o subordinador de Lévy e em que sentido pode ser interpretado como o "inverso" de um processo Gaussiano. (1,5 valores).

(b) Seja $U(t)$ um processo com parâmetros $\alpha, \beta > 0$ e tal que $U(t)$ tem densidade

$$f_{U(t)}(x) = \frac{\beta^{\alpha t}}{\Gamma(\alpha t)} x^{\alpha t-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0.$$

Considerando a igualdade (não precisa de provar esta igualdade) $\exp\left(-t\alpha \log\left(1+\frac{u}{\beta}\right)\right) = \exp\left(-t\int_0^\infty (1-e^{-ux})\,\alpha x^{-1}e^{-\beta x}dx\right)$, mostre que o processo $U(t)$ é um subordinador e identifique b, a medida $\lambda(dx)$ e o processo U. (2 valores)

4. (a) Determine a função característica de um processo do tipo "jump-diffusion" compensado do tipo $L_t = bt + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Z_k - t\lambda\mu_Z$, onde as v.a. $Z_1, ..., Z_k, \ldots$ são i.i.d. e $\mu_Z = \mathbb{E}[Z_k]$ (justifique os cálculos). (2 valores)

(b) Considere o modelo de Kou: modelo associado ao processo "jump-diffusion" não compensado L em que as v.a. Z_k têm distribuição Exponencial Dupla $DbExpo(p, \eta_1, \eta_2)$ com densidade

$$f_Z(x) = p\eta_1 e^{-\eta_1 x}\chi_{(x\geq 0)} + (1-p)\,\eta_2 e^{\eta_2 x}\chi_{(x<0)},$$

onde $0 \leq p \leq 1$, $\eta_1 > 1$, $\eta_2 > 0$. Especifique a função característica de L_1, determine o triplo de características do processo de Lévy e determine a média de L_1. (2 valores)

5. Considere um processo do tipo integral de Lévy Y.

(a) (i) Especifique quais as hipóteses e quais as condições suficientes e necessárias para que Y seja uma martingala. (ii) Especifique quais as hipóteses e quais as condições suficientes para que e^Y seja uma martingala. Deduza especificamente estas condições para o caso em que $Y(t) = \int_0^t U(s)\,ds + \int_0^t V(s)\,dB(s)$, onde B é um movimento Browniano standard. (2 valores)

(b) Prove que sob hipóteses adequadas, se Y é uma martingala então tem que verificar as condições referidas na alínea (a) i). (2 valores)

6. Assuma que (hipótese) para um processo simples $F \in S$ e sendo M uma martingala contínua, temos que o integral estocástico $\int_0^t \int_E F(t,x)\,M(ds,dx)$ é um processo contínuo para cada $t \in [0,T]$.

Considere agora um processo $F \in \mathcal{P}_2$, a medida com valores em martingalas $M(t,E)$ e o integral estocástico:

$$I_t(F) = \int_0^t \int_E F(t,x)\,M(ds,dx)\,.$$

Mostre que se M é uma martingala contínua então o integral estocástico $I_t(F)$ também é um processo contínuo em $[0,T]$.

(Sugestão: Considere primeiro $F \in \mathcal{H}_2$ e aproxime F por uma sucessão de processos simples. Use a hipótese, a desigualdade de Chebyshev e a desigualdade de martingala de Doob)
(2 valores)