

# Mestrados

Métodos Quantitativos para DEE

2018/2019

Leonor Santiago Pinto  
Gab 506 Quelhas  
Telef 213 925 845  
Email: [lpinto@iseg.ulisboa.pt](mailto:lpinto@iseg.ulisboa.pt)

Aulas Multiobjetivo – Metas.

Otimização Multiobjetivo Metas.

STFA: exercícios no final da apresentação



Até agora, PL com um único objetivo:

- minimizar custo total,
- maximizar receita total,
- minimizar o desperdício,
- maximizar a eficiência total, ...

No entanto, na prática, existem frequentemente vários objetivos (contraditórios):

- melhorar a imagem da companhia
- minimizar os custos totais
- satisfazer um certo nível de emprego

1<sup>os</sup> trabalhos: década de 50



Formas de abordar mais do que um objetivo simultaneamente:

Para o decisor,

i) Há hierarquização ordinal de objetivos

Otimiza-se primeiro o objetivo de prioridade mais elevada; Otimiza-se então o segundo objetivo no conjunto de soluções admissíveis que eram ótimas para o primeiro objetivo (...)

Se o decisor estabelecer uma meta  $g_k$  para cada objetivo  $k$  e minimizar, pela mesma ordem de prioridade, os desvios relativos à meta estabelecida → **Programação por metas hierarquicas**

ii) Há hierarquização cardinal de objetivos

O objetivo  $k$  tem um peso,  $w_k$ , ( $k=1, \dots, r$ ) otimizando-se a soma ponderada dos objetivos  
→ PL uniobjetivo

Após estabelecer uma meta para cada objetivo, otimiza-se a soma ponderada dos desvios relativamente às metas estabelecidas → **Programação por metas não hierarquicas**

iii) Inexistência total de hierarquia de objetivos

Determinam-se soluções admissíveis para as quais não há nenhuma melhor  
**Otimização vetorial**

## exemplo



A Dewright Company está a estudar a produção de três novos produtos. A direção de marketing informou que não se deve produzir mais do que 60 unidades do total dos três produtos.

Pretende-se saber qual a quantidade a produzir de cada um deles tendo em conta três fatores diferentes:

- lucro a longo prazo
- estabilidade da força de trabalho
- nível de investimento.

Pretende, se possível

- atingir um mínimo de 125 milhões de dolares de lucro
- manter o atual número de empregados
- que o investimento inicial seja, no máximo, de 55 milhões de dolares

A contribuição de cada produto para cada um dos objetivos é proporcional à taxa de produção, de acordo com o quadro

	contribuição unit. do produto		
	P1	P2	P3
Lucro a longo prazo	12	9	15
Nível de emprego	5	3	4
Investimento inicial	5	7	8



Para o objetivo i,

- i) Estabelece-se uma meta numérica específica,  $g_i$ , e para cada meta  $g_i$  define-se
  - = desvio, por defeito,  
relativamente à meta fixada
  - = desvio, por excesso,  
relativamente à meta fixada
- ii) penalizam-se os desvios, relativamente às metas estabelecidas e então,  
procura-se uma solução que ‘minimize os desvios’  
(melhor solução de compromisso)

Diferença entre metas e restrições

restrições são impossibilidades

metas são valores desejáveis



metas não hierarquizadas (há hierarquização cardinal dos objetivos)

todas as metas têm importância semelhante  
- **solver (min. soma ponderada dos desvios)**

metas hierarquizadas (há hierarquização ordinal dos objetivos)

atribuem-se diferentes níveis de prioridade às diferentes metas, não devendo nunca uma meta de prioridade mais baixa ser atingida à custa de metas de prioridade mais alta

- **aplicações sucessivas do solver**  
**(resolução gráfica, nalguns casos particulares)**



**1º** Definir todas as variáveis de decisão e especificar as metas a atingir

**2º** Formulação das restrições

- restrições de sinal
- restrições funcionais
- restrições relativas às metas  
(expressam as relações entre as var. de decisão e as metas a atingir – variáveis de desvio)

**3º** Objetivo e função objetivo

a f.o. deve traduzir o posicionamento do decisor face às diferentes metas, estabelecendo-se para tal graus de prioridade e/ou ponderações.



## exemplo



A Dewright Company está a estudar a produção de três novos produtos. A direção de marketing informou que não se deve produzir mais do que 60 unidades do total dos três produtos.

Pretende-se saber qual a quantidade a produzir de cada um deles tendo em conta três fatores diferentes:

- lucro a longo prazo
- estabilidade da força de trabalho
- nível de investimento.

### Pretende

- atingir um mínimo de 125 milhões de dolares de lucro
- manter o atual número de empregados
- que o investimento inicial seja, no máximo, de 55 milhões de dolares

A contribuição de cada produto para cada um dos objetivos é proporcional à taxa de produção, de acordo com o quadro

	contribuição unit. do produto			Meta
	P1	P2	P3	
Lucro a longo prazo	12	9	15	$\geq 125$ (milhões dolares)
Nível de emprego	5	3	4	$= 40$ (centenas empreg.)
Investimento inicial	5	7	8	$\leq 55$ (milhões dolares)



## Metas não hierarquizadas

A Dewright Company está a estudar a produção de três novos produtos. A direção de marketing informou que não se deve produzir mais do que 60 unidades do total dos três produtos.

Pretende-se saber qual a quantidade a produzir de cada um deles tendo em conta três fatores diferentes:

- lucro a longo prazo
- estabilidade da força de trabalho
- nível de investimento.

### Pretende

- atingir um mínimo de 125 milhões de dolares de lucro
- manter o atual número de empregados
- que o investimento inicial seja, no máximo, de 55 milhões de dolares

A administração da Dewright Company sabe que, provavelmente, não será possível atingir estas três metas simultaneamente, pelo que decidiu discutir as suas prioridades com diferentes responsáveis na empresa.

### Decidiu-se

- penalizar 5, por cada milhão de lucro a menos
- penalizar 2, por cada centena de empregados que se contratarem de novo
- penalizar 4, por cada centena de empregados que se despedirem
- penalizar 3, por cada milhão de dolares de investimento a mais

A contribuição de cada produto para cada um dos objetivos é proporcional à taxa de produção, de acordo com o quadro

	contribuição unit. do produto			meta (unidades)	penalidade
	P1	P2	P3		
Lucro a longo prazo	12	9	15	$\geq 125$ (milhões dolares)	5/milhão abaixo
Nível de emprego	5	3	4	= 40 (centenas empreg.)	2/centena acima 4/centena abaixo
Investimento inicial	5	7	8	$\leq 55$ (milhões dolares)	3/milhao acima

# Metas não hierarquizadas Exemplo Solver



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K		N	O
1														
2			Unidades de							desvios				
3			P1	P2	P3	nível atingido		RHS		$d_i^-$	$d_i^+$			
4		Rest1	1	1	1	0	≤	60				total		meta
5	lucro	meta 1	12	9	15	0	≥	125				0	=	125
6	emprego	meta 2	5	3	4	0	=	40				0	=	40
7	investimento	meta 3	5	7	8	0	≤	55				0	=	55
8		solução												
9														
10									M1	5				
11									M2	4	2			
12									M3		3			
13												FO		
14												0		
15														
16														

=SUMPRODUCT(C4:E4;\$C\$8:\$E\$8)
=SUMPRODUCT(C5:E5;\$C\$8:\$E\$8)
=SUMPRODUCT(C6:E6;\$C\$8:\$E\$8)
=SUMPRODUCT(C7:E7;\$C\$8:\$E\$8)

=F5+J5-K5
=F6+J6-K6
=F7+J7-K7

=SUMPRODUCT(J5:K7;J10:K12)
----------------------------

# Metas não hierarquizadas

## Exemplo Solver



Solver Parameters

Set Objective:

To:  Max  Min  Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method

Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Buttons: Add, Change, Delete, Reset All, Load/Save, Options, Help, Solve, Close

# Metas não hierarquizadas

## Exemplo Solver



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2			Unidades de								desvios			
3			P1	P2	P3	nível atingido		RHS		$d_i^-$	$d_i^+$			
4		Rest1	1	1	1	10	≤	60				total		meta
5	lucro	meta 1	12	9	15	125	≥	125		0	0	125	=	125
6	emprego	meta 2	5	3	4	48,33333333	=	40		0	8,333333	40	=	40
7	investimento	meta 3	5	7	8	55	≤	55		0	0	55	=	55
8		solução	8,333333	0	1,666667									
9										Penalidades				
10									M1	5				
11									M2	4	2			
12									M3		3			
13												FO		
14												16,66666667		
15														

A melhor solução de compromisso consiste na produção de 8.33 unidades do produto 1 e 1.67 unidades do produto 2. Assim, as metas 1 e 3 são completamente satisfeitas mas o nível de emprego pretendido (40 centenas) é excedido em mais de 20%, exigindo a contratação de 833 tabalhadore.



Após uma análise cuidadosa dos resultados obtidos pelo departamento de IO, a Administração da Dewright Company considera muito grave exceder em mais de 20% o nível de emprego pretendido, pois tal implicaria grandes custos de formação e, como esta situação é temporária, futuros despedimentos.

Por outro lado, pretende 'jogar pelo seguro' o mais possível, no que respeita ao investimento, isto é, quer tentar não ultrapassar a meta do investimento inicial.

Com base nestas considerações, atribuíram-se as seguintes prioridades às metas

<u>Nível de prioridade</u>	<u>Fator</u>	<u>meta</u>	<u>penalidade</u>
1ª prioridade	nível de emprego	$\leq 40$	2
	investimento	$\leq 55$	3
2ª prioridade	lucro longo prazo	$\geq 125$	5
	nível de emprego	$\geq 40$	4

Nestas condições, qual a melhor solução de compromisso?

# Metas hierarquizadas

## Exemplo Solver – prioridade 1



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2			Unidades de								desvios			
3			P1	P2	P3	nivel atingido		RHS		$d_i^-$	$d_i^+$			
4		Rest1	1	1	1	0	≤	60				total		meta
5	lucro	meta 1	12	9	15	0	≥	125		0	0	0	=	125
6	emprego	meta 2	5	3	4	0	=	40		0	0	0	=	40
7	investimento	meta 3	5	7	8	0	≤	55		0	0	0	=	55
8		solução	0	0	0									
9										Penalidades				
10						prioridade 1			M1					
11									M2	2				
12									M3	3				
13												FO		
14												0		
15														
16														
17						prioridade 2								
18														
19														
20														
21														

**Solver Parameters**

Set Objective:

To:  Max  Min  V

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:





# Metas hierarquizadas

## Exemplo Solver – prioridade 1



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2			Unidades de								desvios			
3			P1	P2	P3	nível atingido		RHS		$d_i^-$	$d_i^+$			
4		Rest1	1	1	1	6,875	≤	60				total	meta	
5	lucro	meta 1	12	9	15	103,125	≥	125		21,875	0	125	=	125
6	emprego	meta 2	5	3	4	27,5	=	40		12,5	0	40	=	40
7	investimento	meta 3	5	7	8	55	≤	55		0	0	55	=	55
8		solução	0	0	6,875									
9										Penalidades				
10						prioridade 1			M1					
11									M2	2				
12									M3	3		FO		
13												0		
14														
15														
16										Penalidades				
17						prioridade 2			M1	5				
18									M2	4				
19									M3			FO		
20												159,375		

=SUMPRODUCT(J5:K7;J17:K19)

# Metas hierarquizadas

## Exemplo Solver – prioridade 2



Solver Parameters

Set Objective:

To:  Max  Min  Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

- \$F\$4 <= \$H\$4
- \$L\$13 = 0
- \$L\$5:\$L\$7 = \$N\$5:\$N\$7

Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:

Solving Method

Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Buttons: Add, Change, Delete, Reset All, Load/Save, Options, Help, Solve, Close

# Metas hierarquizadas

## Exemplo Solver – prioridade 2



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2			Unidades de							desvios				
3			P1	P2	P3	nível atingido		RHS		$d_i^-$	$d_i^+$			
4		Rest1	1	1	1	8,75	≤	60				total		meta
5	lucro	meta 1	12	9	15	116,25	≥	125		8,75	0	125	=	125
6	emprego	meta 2	5	3	4	40	=	40		0	0	40	=	40
7	investimento	meta 3	5	7	8	55	≤	55		0	0	55	=	55
8		solução	5	0	3,75									
9										Penalidades				
10						prioridade 1			M1					
11									M2		2			
12									M3		3	FO		
13												0		
14														
15														
16										Penalidades				
17						prioridade 2			M1	5				
18									M2	4				
19									M3			FO		
20												43,75		

A melhor solução de compromisso consiste na produção de 5 unidades do produto 1 e 3,75 unidades do produto 2. Assim, as metas de prioridade 1 são completamente satisfeitas bem como a meta de emprego da prioridade 2, contudo a meta lucro, de segunda prioridade fica 8,75 milhões de dolares aquém do pretendido (125 milhões).



Considere o seguinte problema

$$\min z = P_1(d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^-),$$

$$s. a \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{array} \right.$$

a) Resolva-o graficamente;

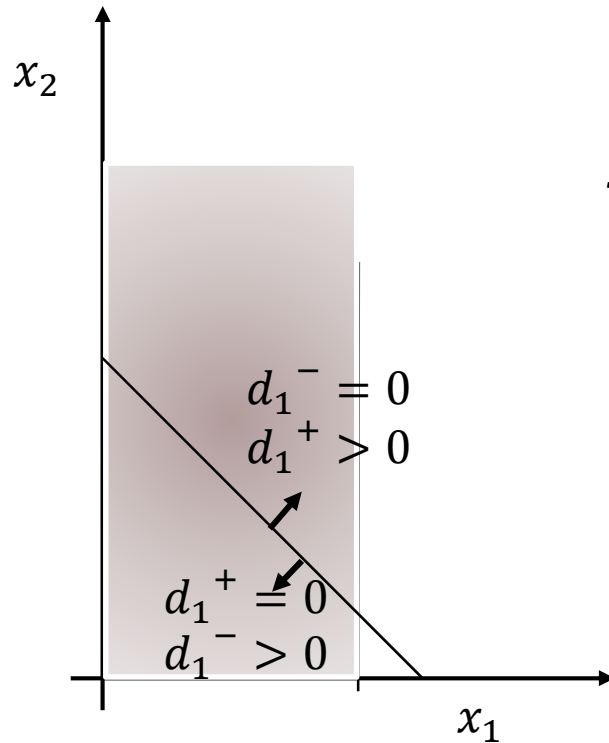
TPC

b) Resolva-o com o *Solver*;

c) Alterando as prioridades para  $P_1(d_1^+) + P_2(d_3^-) + P_3(d_2^-)$ , verifique que se obtém outra solução de compromisso.

# Metas hierarquizadas resolução gráfica

$$\min z = P_1 (d_1^+) + P_2 (d_2^-) + P_3 (d_3^-),$$

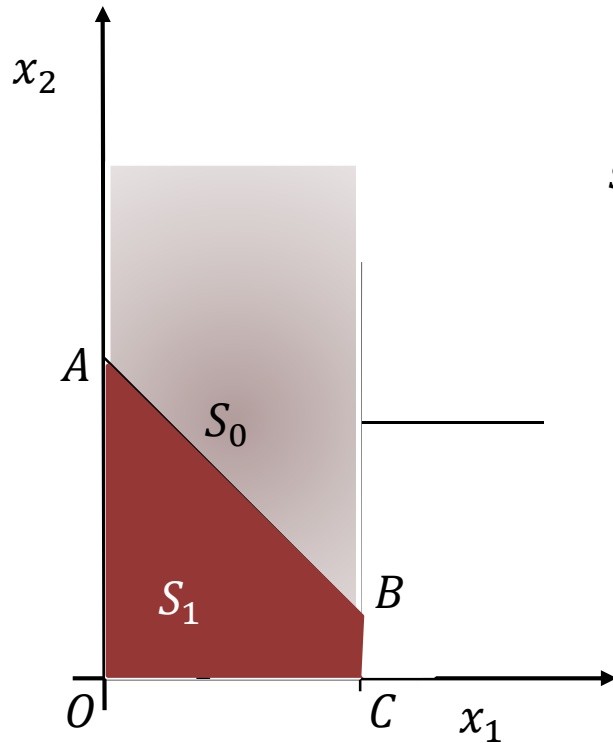


$$s. a \begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{cases}$$

$$S_0 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 8\}$$

# Metas hierarquizadas resolução gráfica

$$\min z = P_1(d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^-),$$



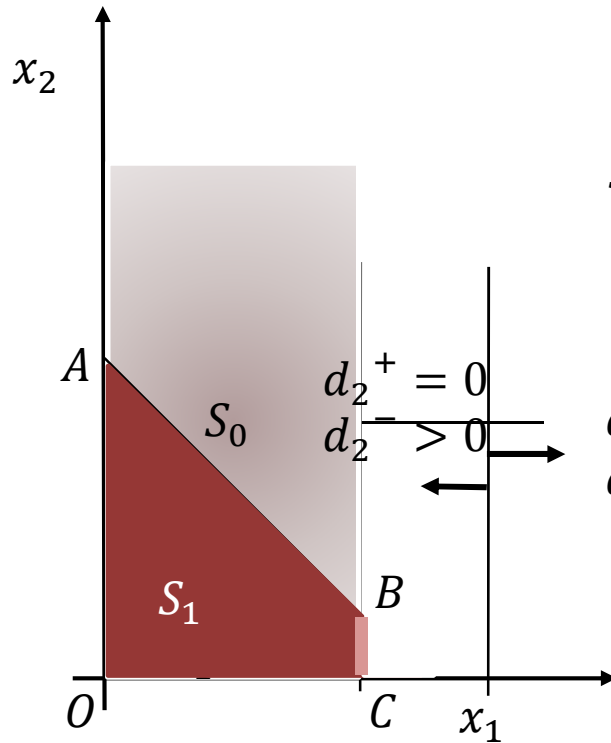
$$\text{s. a.} \begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{cases}$$

$S_0$   $S_0 = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 8\}$

$S_1$   $S_1 = [OABC]$

# Metas hierarquizadas resolução gráfica

$$\min z = P_1(d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^-),$$



$$s. a \begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{cases}$$

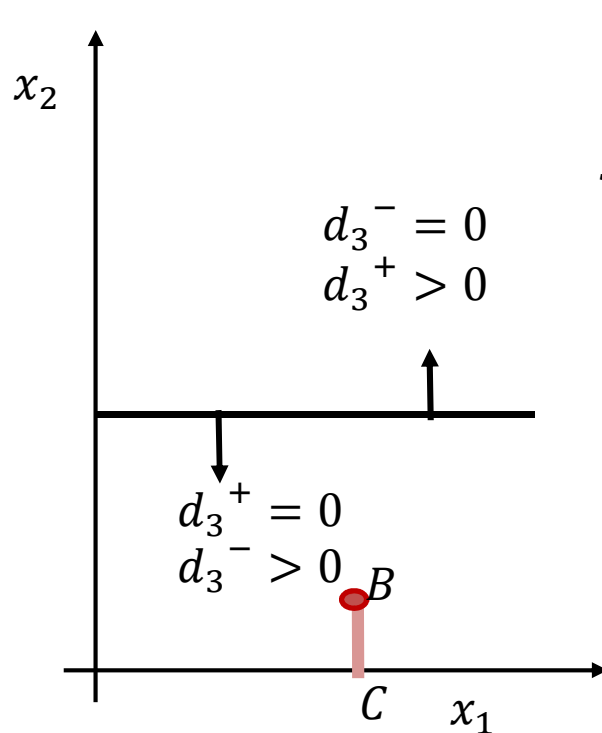
$$S_0 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 8\}$$

$$S_1 = [OABC]$$

$$S_2 = [BC]$$

# Metas hierarquizadas resolução gráfica

$$\min z = P_1(d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^-),$$



$$s. a \begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ x_1 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{cases}$$

Melhor solução de compromisso  $B$

$S_2$   $S_2 = [BC]$

$S_3$   $B$

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$d_1^- = d_1^+ = d_2^+ = d_3^+ = 0; d_2^- = 4; d_3^- = 6$$





Uma empresa dispõe de 7200 u.m. para gastar na campanha publicitária de lançamento de um novo produto. Na campanha pretende usar telas de grande dimensão (cobertura de edifícios) e anúncios na rádio. Foi já decidido que o número de anúncios na rádio não pode exceder o número de telas e que estas serão, no máximo, 60. Cada tela custa 60 u.m. e cada anúncio na rádio custa 90 u.m.

Da experiência passada, sabe-se que o sucesso de um novo produto depende muito da campanha publicitária, pelo que se pretende gastar na campanha pelo menos 5400 u.m. Há também a convicção de que se deverão fazer pelo menos 50 anúncios na rádio e tentar-se-á também não exceder os 30 telas.

a) Consciente de que será muito difícil conseguir todas estas pretensões foi decidido penalizar da mesma forma cada 100 u.m. disponíveis e não gastas (abaixo das 5400), cada anúncio de rádio a menos do que o pretendido e cada 2 telas a mais do que as 30. Nestas condições, como deve ser feita a campanha publicitária?

b) Não tendo gostado da solução obtida anteriormente, a direcção da empresa definiu como prioridade máxima não fazer mais do que 30 telas. Como segunda prioridade fazer pelo menos os 50 anúncios na rádio e a terceira prioridade será gastar as 5400 u.m. Como deve ser feita a campanha publicitária?

(Depois de formular o problema, resolva-o pelo *Solver* e também graficamente)

## exercício



Resolva-o (graficamente e com o *Solver*) e mostre que a solução não é independente da ordem de prioridades estabelecida

$$\begin{array}{l} \min \quad z = P_1(d_1^+) + P_2(d_2^-) + P_3(d_3^- + d_3^+) \\ \text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ -2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 0 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

(sugestão: troque a segunda e terceira prioridades).