

# *Cálculo e Instrumentos Financeiros*

## *Empréstimos por obrigações*

Alfredo D. Egidio dos Reis



## 6. Empréstimos por obrigações

6.1 Introdução e conceitos

6.2 Reembolso

6.3 Vida mínima, máxima e média das obrigações

6.4 Rendibilidade e custo. Taxas efectivas



## Exemplo (Ficha Técnica)

Dada a necessidade de financiamento a longo prazo, para investimento numa nova linha de produção, a empresa Zeta, S.A. emitiu um empréstimo obrigacionista com as seguintes características (ficha técnica):

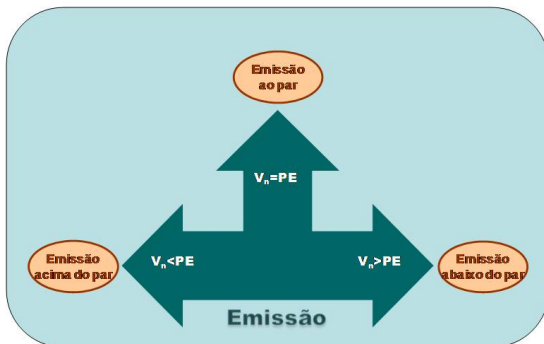
- |   |                    |
|---|--------------------|
| ▶ Número de obrigações emitidas ( $N_o$ )   | 500 000            |
| ▶ Valor de emissão                          | 5,00 €             |
| ▶ Valor nominal de cada obrigação ( $V_n$ ) | 5,00 €             |
| ▶ Maturidade (prazo) do empréstimo ( $n$ )  | 5 anos             |
| ▶ Reembolsos anuais constantes              | pelo valor nominal |
| ▶ Data do primeiro reembolso                | 1 ano após emissão |
| ▶ Taxa de juro anual constante ( $i_A$ )    | 10%                |

Calcule e preencha os valores do quadro de amortização.



## Conceitos:

- **Valor Nominal** ou Principal ( $VN$ ) - Val. inscrito e base da taxa remuneratória;
- Valor de Subscrição/ "**Preço de Emissão**" ( $PE$ ) –Val. aquisição no mercado primário. Pode ser  $VN \neq PE$ .
- **Valor de Reembolso** ( $VR$ ) - Val. amortização do empréstimo. **Emissão/Cotação/Reembolso:**



## Cotação e Reembolso

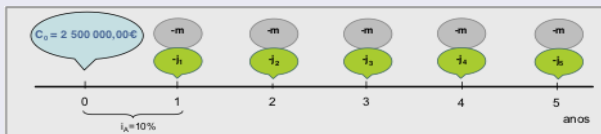
- **Cotação:** As obrigações poderão ser admitidas a cotação na Bolsa:
  - **Acima do par:** quando a cotação se situa acima do valor nominal;
  - **Ao par:** quando a cotação é igual ao valor nominal;
  - **Abaixo do par:** quando a cotação se situa abaixo do valor nominal.
  
- **Reembolso:** Também o valor de reembolso pode assumir 3 situações:
  - **Acima do par:**  $VR > VN$ . Existe prémio de reembolso;
  - **Ao par:**  $VR = VN$  ;
  - **Abaixo do par:**  $VR < VN$  (invulgar, é desincentivo à compra)





## Exemplo (Ex. 6.1, p 295)

*Empresa Zeta. Ficha técnica: Número de obrigações emitidas ( $N_0$ ): 500 000; Valor de emissão: 5,00€; Valor nominal ( $V_n$ ): 5,00€; Maturidade (prazo) do empréstimo: 5 anos; Reembolsos anuais constantes pelo valor nominal; 1º reembolso: 1 ano após emissão; Taxa de juro anual constante ( $i_A$ ): 10%.*



- $N^\circ$  a reembolsar no ano  $k$ :  $N_k := \frac{N_0}{n} = \frac{500000}{5} = 100000$ .
- Amortização no ano  $k$ :  $m_k = N_k \times V_n = 500\,000,00\text{€}$
- Valor do empréstimo:  $C_0 = N_0 \cdot V_n = 2500000,00\text{€}$

## Modalidade A1. Quadro de Amortização

### Exemplo (Ex. 6.1, cont.)

Período (k)	Capital em Dívida no Início ( $C_{k-1}$ )	Juro a pagar Fim do Período ( $j_k$ )	Nº de Obrigações Reembolsadas ( $N_k$ )	Amortização ( $m_k$ )	Prestação Total ( $T_k$ )	Amortizações Acumuladas ( $M_k$ )
1	2 500 000,00	250 000,00	100 000	500 000,00	750 000,00	500 000,00
2	2 000 000,00	200 000,00	100 000	500 000,00	700 000,00	1 000 000,00
3	1 500 000,00	150 000,00	100 000	500 000,00	650 000,00	1 500 000,00
4	1 000 000,00	100 000,00	100 000	500 000,00	600 000,00	2 000 000,00
5	500 000,00	50 000,00	100 000	500 000,00	550 000,00	2 500 000,00

$$\begin{array}{lll}
 N_k = \frac{N_0}{n} & m_k = N_k \cdot Vn & C_0 = N_0 \cdot Vn \\
 C_{k-1} = C_0 - (k-1) \cdot m & j_k = C_{k-1} \cdot i & M_k = k \cdot m
 \end{array}$$

Período (k)	Capital em Dívida no Início ( $C_{k-1}$ )	Juro a pagar Fim do Período ( $j_k$ )	Nº de Obrigações Reembolsadas ( $N_k$ )	Amortização ( $m_k$ )	Prestação Total ( $T_k$ )	Amortizações Acumuladas ( $M_k$ )
1	$C_0$	$j_1 = C_0 \cdot i$	$N_0/n$	$m$	$j_1 + m$	$m$
2	$C_1 = C_0 - m$	$j_2 = C_1 \cdot i$	$N_0/n$	$m$	$j_2 + m$	$2m$
3	$C_2 = C_0 - 2m$	$j_3 = C_2 \cdot i$	$N_0/n$	$m$	$j_3 + m$	$3m$
...	...	...	...	...	...	...
n	$C_{n-1} = C_0 - (n-1)m$	$j_n = C_{n-1} \cdot i$	$N_0/n$	$m$	$j_n + m$	$n \cdot m$

$$N_k = \frac{N_0}{n} \quad m_k = N_k \cdot Vn \quad C_0 = N_0 \cdot Vn$$

$$C_{k-1} = C_0 - (k-1) \cdot m \quad j_k = C_{k-1} \cdot i \quad M_k = k \cdot m$$

## Modalidade A<sub>2</sub>

### Reembolso de número constante de obrigações—“Acima do par”

- *Acima do par*:  $c$ / prémios de reembolso na data de vencimento;
- Os prémios de reembolso poderão ser constantes ou variáveis.

#### Exemplo (Ex. 6.2 [6.1 cont.])

A firma Zeta, S.A. emitiu um empréstimo obrigacionista. Ficha técnica: No: 500 000; Valor de emissão: 5,00€; VN: 5,00€; Prazo: 5 anos; Reembolsos anuais constantes: pelo valor nominal; Data do primeiro reembolso: 1 ano após emissão:  $i_A$ : 10%.  
Adicionalmente, nos **reembolsos** serão considerados os prémios:

- 1º Reembolso:  $p_1 = 0,75€$ ;                      2º Re.:  $p_2 = 1,00€$ ;
- 3º R:  $p_3 = 1,25€$ ; 4º R.:  $p_4 = 1,50€$ ; 5º R.:  $p_5 = 1,75€$ .

## 6.2 Modalidade A2. Quadro de Amortização

### Exemplo (Ex. 6.2 (cont))

Período (k)	Capital em Dívida no Início ( $C_{k-1}$ )	Juro a pagar Fim do Período ( $j_k$ )	Nº de Obrigações Reembolsadas ( $N_k$ )	Amortização ( $m_k$ )	Prémio de Reembolso ( $P_k$ )	Prestação Total ( $T_k$ )	Amortizações Acumuladas ( $M_k$ )
1	2 500 000,00	250 000,00	100 000,00	500 000,00	75 000,00	825 000,00	500 000,00
2	2 000 000,00	200 000,00	100 000,00	500 000,00	100 000,00	800 000,00	1 000 000,00
3	1 500 000,00	150 000,00	100 000,00	500 000,00	125 000,00	775 000,00	1 500 000,00
4	1 000 000,00	100 000,00	100 000,00	500 000,00	150 000,00	750 000,00	2 000 000,00
5	500 000,00	50 000,00	100 000,00	500 000,00	175 000,00	725 000,00	2 500 000,00

$$P_k = N_k \cdot p_k \quad T_k = j_k + m + P_k$$

## Modalidade A2. Quadro de Amortização

Período	Capital em Dívida no Início	Juro a pagar Fim do Período	Nº de Obrigações Reembolsadas	Montante Reembolsado	Prémio de Reembolso	Prestação Total	Capital Amortizado
(k)	( $C_{k-1}$ )	( $j_k$ )	( $N_k$ )	( $m_k$ )	( $P_k$ )	( $T_k$ )	( $M_k$ )
1	$C_0$	$j_1 = C_0 \cdot i$	$N_0/n$	$m$	$N_k \cdot p_1$	$j_1 + m + P_1$	$m$
2	$C_1 = C_0 - m$	$j_2 = C_1 \cdot i$	$N_0/n$	$m$	$N_k \cdot p_2$	$j_2 + m + P_2$	$2m$
3	$C_2 = C_0 - 2m$	$j_3 = C_2 \cdot i$	$N_0/n$	$m$	$N_k \cdot p_3$	$j_3 + m + P_3$	$3m$
...	...	...	...	...	...	...	...
n	$C_{n-1} = C_0 - (n-1) \cdot m$	$j_n = C_{(n-1)} \cdot i$	$N_0/n$	$m$	$N_k \cdot p_n$	$j_n + m + P_n$	$n \cdot m$

$$P_k = N_k \cdot p_k$$

$$T_k = j_k + m + P_k$$

**Modalidade B: Reembolso por redução do valor**

Reembolso de parte do valor nominal de todas as obrigações:

$$m = N_0 \times VN / n \quad n : n^{\circ} \text{ reembolsos}$$

Período (k)	Capital em Dívida no Início ( $C_{k-1}$ )	Juro a pagar Fim do Período ( $j_k$ )	Amortização ( $m_k$ )	Prestação Total ( $T_k$ )	Amortizações Acumuladas ( $M_k$ )
1	$C_0$	$j_1 = C_0 \cdot i$	m	$j_1 + m$	m
2	$C_1 = C_0 - m$	$j_2 = C_1 \cdot i$	m	$j_2 + m$	2m
3	$C_2 = C_0 - 2m$	$j_3 = C_2 \cdot i$	m	$j_3 + m$	3m
...	...	...	...	...	...
n	$C_{n-1} = C_0 - (n-1) \cdot m$	$j_n = C_{(n-1)} \cdot i$	m	$j_n + m$	n.m

**Exemplo (Ex. 6.3)**

*Empresa  $\Omega$  SA. Ficha técnica: No: 100 000; VE: 10,00€; VN: 10,00€; Reembolsos anuais: por redução ao VN; N° reembolsos (n): 2; Data do primeiro reembolso: 2 anos após a emissão; Tx. juro anual nominal (2 capitalizações): 8%; Pagamento de juros: Semestral; Data do 1º pagamento de juros: 6 meses após a emissão.*

**Quadro de amortização**

Período (semestres)	Capital em Dívida no Início	Juro a pagar Fim do Período	Amortização	Prestação Total	Amortizações Acumuladas
(k)	( $C_{k-1}$ )	( $j_k$ )	( $m_k$ )	( $T_k$ )	( $M_k$ )
1	1 000 000,00	40 000,00	-	40 000,00	-
2	1 000 000,00	40 000,00	-	40 000,00	-
3	1 000 000,00	40 000,00	-	40 000,00	-
4	1 000 000,00	40 000,00	500 000,00	540 000,00	500 000,00
5	500 000,00	20 000,00	-	20 000,00	500 000,00
6	500 000,00	20 000,00	500 000,00	520 000,00	1 000 000,00



## Vida máxima, mínima e média do empréstimo

- 1 **Vida Mínima**,  $V_m$ : Tempo entre a data actual e a primeira data reembolsável da obrigação. À data de emissão  $V_m$  é igual à data de vencimento do 1º reembolso.
- 2 **Vida Máxima**,  $V_M$ : Tempo entre a data actual e a última data possível de reembolso. À data de emissão a  $V_M$  é igual ao prazo empréstimo.
- 3 **Esperança de Vida**,  $E_v$ : Tempo médio de reembolso das obrigações. Obtém-se através da média do número de obrigações amortizadas em cada data de reembolso (lote) ponderados pelos respectivos prazos.

## Esperança de Vida, $E_v$

Tempo médio de reembolso das obrigações.

$$E_v = \frac{1}{\sum_{k=1}^n N_k} \sum_{k=1}^n P_k N_k.$$

$P_k$  : Prazo de reembolso do lote  $k$  de obrigações ainda *vivas*;

$N_k$  : Número de obrigações do lote  $k$  que ainda falta vencer;

$n$  : Número de lotes que ainda falta vencer.

## Exemplo (Ex. 6.4)

*Em 01/07/n Beta S.A. emitiu empréstimo obrigacionista. Ficha Técnica:*

- *Número de obrigações emitidas ( $N_o$ ): 300 000*
- *Valor de emissão: 10,00 €*
- *Valor nominal de cada obrigação ( $V_n$ ): 10,00 €*
- *Maturidade (prazo) do empréstimo: 4 anos*
- *Reembolsos anuais constantes: pelo valor nominal*
- *Número de reembolsos ( $n$ ): 4*
- *Data do primeiro reembolso: 1 ano após emissão*
- *Taxa de juro anual: 5%;*
- *Pagamento de juros: anual;*
- *Data do primeiro pagamento de juros: 1 ano após emissão*

$V_m = 1$  ano;  $V_M = 4$  anos;  $EV$ , na data da emissão:

$$E_v = \frac{1 \times 75000 + 2 \times 75000 + 3 \times 75000 + 4 \times 75000}{75000 + 75000 + 75000 + 75000} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ anos.}$$

**Exemplo (Ex. 6.4)**

*Em 01/07/n a Psi SA emitiu empréstimo obrigacionista. Ficha Técnica:*

- *Número de obrigações emitidas ( $N_o$ ): 300 000*
- *Valor de emissão: 10,00 €*
- *Valor nominal de cada obrigação ( $V_n$ ): 10,00 €*
- *Maturidade (prazo) do empréstimo: 4 anos*
- *Reembolsos anuais constantes: pelo valor nominal*
- *Número de reembolsos ( $n$ ): 4*
- *Data do primeiro reembolso: 1 ano após emissão*
- *Taxa de juro anual: 5%*
- *Pagamento de juros: anual*
- *Data do primeiro pagamento de juros: 1 ano após emissão*

*Calcular  $V_m$ ,  $V_M$  e  $E_v$  na data  $01/04/n + 2$ :  $V_m = \frac{1}{4}$  ano;  $V_M = 2\frac{1}{4}$  anos;  
 $E_V$  em  $01/04/n + 2$ , :*

$$E_v = \frac{0.25 \times 75,000 + 1.25 \times 75,000 + 2.25 \times 75,000}{75,000 + 75,000 + 75,000} = 1,25 \text{ anos.}$$

## Taxas efectivas das obrigações. Rendimentos para o investidor

- **Juros** recebidos;
- **Prémio de Reembolso**, eventualmente se acima do par;
- **Desconto de Emissão**, eventualmente, se abaixo do par.

**Taxa Anual Efectiva**,  $r$  (Reembolso único) :

$$PE = (VN - DE) = \sum_{m=1}^k \frac{j_m}{(1+r)^m} + \frac{(V_n + PR)}{(1+r)^k}$$

$$PE = VN \cdot i \cdot a_{\overline{k}|r} + \frac{(V_n + PR)}{(1+r)^k}, \text{ se juros anuais constantes.}$$

$VN$ : Valor nominal;  $PE$ : Preço Emissão;  $DE$ : Desconto Emissão;  
 $j_m$ : Juro anual à taxa  $i$ ;  $k$ : período de reembolso;  $PR$ : Prémio Reembolso (se existir)

### Exemplo (Ex. 6.7)

Considere que no dia 02/01/n a Delta, S.A. emitiu empréstimo obrigacionista de 200 000 obrigações. Características:

- Valor nominal de cada obrigação ( $V_n$ ): 10,00 €
- Preço de emissão (PE): 9,20 €
- Reembolsos anuais constantes: pelo valor nominal
- Número de reembolsos: 4
- Data do primeiro reembolso: 02/01/n + 2
- Valor de reembolso: ao par
- Taxa de juro anual: 8%
- Pagamento de juros: anualmente
- Data do primeiro pagamento de juros: 02/01/n + 1

Um investidor adquiriu uma obrigação na emissão com reembolso no último lote (02/01/n + 5). Qual a taxa de rendimento?

## Exemplo (Ex. 6.7 (cont.))

Qual a taxa anual de rendimento para o investidor?

Ano	0	1	2	3	4	5
PE	(9.20)					
juro		0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
VR						10 + 0

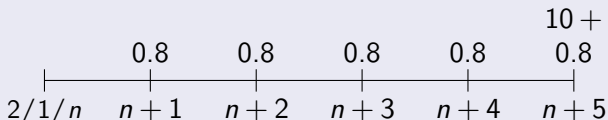
$$j_1 = j_2 = j_3 = j_4 = j_5 = 10,00 \times 0,08 = 0,80\text{€}$$

$$PE = VN \cdot i \cdot a_{\overline{k}|r} + \frac{(VN + PR)}{(1+r)^k}$$

$$9,20 = 0,8 \cdot a_{\overline{5}|r} + \frac{10+0}{(1+r)^5} \Leftrightarrow r \simeq 10,117\% \quad (\text{Excel})$$

## Exemplo (Ex. 6.7 (cont.)). Rendimento alternativo

Qual o valor acumulado,  $S$ , do investimento ao fim do prazo?



$$r \simeq 10,117\%$$

$$S = 0,8 \cdot s_{\overline{5}|r} + 10 \simeq 14.89$$

Rendimento alternativo: Se puzesse €9.2 num depósito  $c/$  juros à taxa de  $r = 10,117\%$ , V.A.:

$$S = 9.2(1 + r)^5 \simeq \text{€}14.89$$



## Determinação do Valor de Compra:

### Exemplo (Ex. 6.8 (6.7 cont.))

Um investidor pretende adquirir, em  $02/07/n + 1$ , 200 destas obrigações e aponta a uma taxa de rendimento anual efectiva de 9%. Se as obrigações tiverem um plano de reembolso de 25 no segundo lote, 75 no penúltimo lote e 100 no último lote, quanto deverá o investidor pagar pelas obrigações?



## Exemplo (Ex. 6.8 (cont.))

Valor de compra da obrigação:

Data	Obg	Juro, $j_t =$	Obg	Reembolso $m_t =$
$2/1/n + 2$	200	$200 \times 10 \times 0,08$ $= 160\text{€}$		
$2/1/n + 3$	200	$j_3 = 160,00\text{€}$	25	$25 \times 10 = 250\text{€}$
$2/1/n + 4$	175	$j_4 = 140,00\text{€}$	75	$75 \times V_n = 750\text{€}$
$2/1/n + 5$	100	$j_5 = 80,00\text{€}$	100	$100 \times V_n = 1000\text{€}$

$$C = \frac{160,00}{1,09^{0,5}} + \frac{410,00}{1,09^{1,5}} + \frac{890,00}{1,09^{2,5}} + \frac{1080,00}{1,09^{3,5}} = 2043,62\text{€}$$

$$c = \frac{C}{200} = 10,22\text{€}$$

## Taxa Efectiva para o Emitente

- A entidade emitente paga uma taxa de juro que em geral não é uma taxa real, efectiva.
- Suporta custos adicionais para além da taxa de juro nominal:
  - impostos, comissões, descontos de emissão, prémios de reembolso...
- Se incluirmos os custos envolvidos podemos calcular uma taxa de remuneração efectiva.

Associados à Emissão	Ao Longo do Empréstimo
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Impressão;</li> <li>• Publicidade;</li> <li>• Autorizações;</li> <li>• Impostos;</li> <li>• Comissões a Inst. Financeiras pela colocação;</li> <li>• Descontos de emissão;</li> <li>• Etc..</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comissões a Inst. Financeiras pelos serviços de pagamento dos juros e dos reembolsos;</li> <li>• Juros a pagar aos investidores ao longo do empréstimo;</li> <li>• Custos associados aos prémios de reembolso.</li> </ul>

## Taxa Efectiva para o Emitente, $r$ :

$$N_0 \times PE = \sum_{p=1}^k \frac{OC_p}{(1+r)^p} + \sum_{p=1}^k \frac{j_p}{(1+r)^p} + m \cdot a_{\overline{n}|r}$$

$N_0 \times PE$  : Valor total subscrição

$OC_p$  : Outros Custos no ano  $p$

$j_p$  : juros à taxa nominal, ano  $p$

$m$  : amortização do período, se constante

$k$  : prazo do empréstimo

$n$  : prazo da amortização

**Exemplo (Ex. 6.9)**

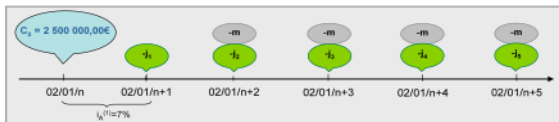
No dia 02/01/ $n$ , a Sociedade Alfa, S.A. emitiu um empréstimo obrigacionista. Ficha técnica:

- Número de obrigações emitidas ( $N_o$ ): 250 000;
- Valor nominal de cada obrigação ( $V_n$ ): 10,00€;
- 4 reembolsos anuais constantes: pelo valor nominal;
- Data do primeiro reembolso: 02/01/ $n + 2$ ;
- Valor de reembolso: 10,00€;
- Tx. juro anual nominal: 7%; juros: pagos anualmente;
- Data do primeiro pagamento de juros: 02/01/ $n + 1$ .

Calcular a taxa efectiva anual, nos seguintes casos:

- 1 Obrigações emitidas ao par, valor de subscrição: 10,00€;
- 2 Obrig. emitidas abaixo do par, v. subscrição: 9,00€.

# 1 Obrigações emitidas ao par, valor de subscrição: €10,00



Periodos (anos)	Capital em Dívida no Início	Juro a pagar Fim do Período	Amortização	Prestação Total	Amortizações Acumuladas
(k)	( $C_{k,s}$ )	( $j_k$ )	( $m_k$ )	( $T_k$ )	( $M_k$ )
1	2 500 000,00	175 000,00	-	175 000,00	-
2	2 500 000,00	175 000,00	625 000,00	800 000,00	625 000,00
3	1 875 000,00	131 250,00	625 000,00	756 250,00	1 250 000,00
4	1 250 000,00	87 500,00	625 000,00	712 500,00	1 875 000,00
5	625 000,00	43 750,00	625 000,00	668 750,00	2 500 000,00

$$2.500.000 = \frac{175000}{(1+r)} + \frac{800000}{(1+r)^2} + \frac{756250}{(1+r)^3} + \frac{712500}{(1+r)^4} + \frac{668750}{(1+r)^5}$$

Taxa → 7,0% (Excel)

**2** Obr. emitidas abaixo do par: €9,00

$$250000 \times 9 = \frac{175000}{(1+r)} + \frac{800000}{(1+r)^2} + \frac{756250}{(1+r)^3} + \frac{712500}{(1+r)^4} + \frac{668750}{(1+r)^5}$$

Taxa  $\rightarrow$  10,623% (Excel)

**Emissão ao par, com custos adicionais:**

Custos Emissão: publicidade+autorizações+comissões

$$CE = 120000 + 30000 + 2500000 \times 0,01 = 175000$$

$$2.500.000 = 175000 + \frac{175000}{(1+r)} + \frac{800000}{(1+r)^2} + \frac{756250}{(1+r)^3} + \frac{712500}{(1+r)^4} + \frac{668750}{(1+r)^5}$$

Taxa  $\rightarrow$  9,477% (Excel)

## 6. Empréstimos por obrigações

6.1 Introdução e conceitos

6.2 Reembolso

6.3 Vida máxima e vida média do empréstimo

6.4 Taxas efectivas das obrigações